

თინა ბექაური  
ავთანდილ საგინაშვილი  
გიორგი ბექაური

# მათემატიკა

# 8

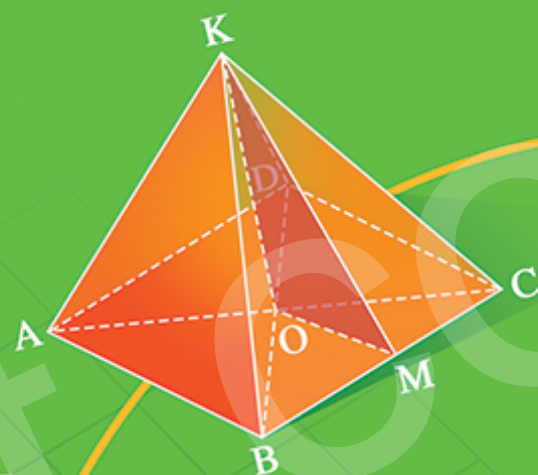


$$\begin{cases} 2x + 3y = 35 \\ 4x - 2y = 30 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$y = 2x$$

$$y = 0,25x$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$x \in [a; b]$$

ნაწილი

1

## სარჩევი

### I ნაწილი

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| <b>თავი 1. რაციონალური რიცხვები</b>                  | <b>7</b>   |
| 1.1. რაციონალური რიცხვები                            | 8          |
| 1.2. ამოცანები ნაშთიან გაყოფაზე                      | 12         |
| 1.3. პერიოდული ათწილადები                            | 18         |
| 1.4. მთელმარცვნიერი ხარისხი                          | 22         |
| 1.5. რიცხვის ჩაწერის სტანდარტული ფორმა               | 26         |
| 1.6. მთელმარცვნიერი ხარისხის თვისებები               | 29         |
| პირველი თავის მიმოხილვა                              | 34         |
| ტესტი №1                                             | 38         |
| <br>                                                 |            |
| <b>თავი 2. გეომეტრიული გარდაქმნები, ოთხკუთხედები</b> | <b>41</b>  |
| 2.1. სიმეტრია ცენტრის მიმართ                         | 42         |
| 2.2. მობრუნება და მისი თვისებები                     | 47         |
| 2.3. პარალელური წრფეები                              | 53         |
| 2.4. პარალელოგრამის თვისებები                        | 58         |
| 2.5. თაღის თეორემა                                   | 62         |
| 2.6. პარალელოგრამობის ნიშნები                        | 66         |
| 2.7. რომბი, რომბის თვისებები                         | 70         |
| 2.8. მართკუთხედი და კვადრეტი                         | 73         |
| 2.9. ტრაპეცია, ტრაპეციის თვისებები                   | 77         |
| 2.10. მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი                  | 81         |
| მეორე თავის მიმოხილვა                                | 84         |
| ტესტი №2                                             | 87         |
| <br>                                                 |            |
| <b>თავი 3. ალგებრული წილადი</b>                      | <b>90</b>  |
| 3.1. ალგებრული წილადი                                | 91         |
| 3.2. ალგებრული წილადის შეკვეცა                       | 95         |
| 3.3. ალგებრული წილადების გაერთმნიშვნელობა            | 100        |
| 3.4. მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე                  | 104        |
| მესამე თავის მიმოხილვა                               | 111        |
| ტესტი №3                                             | 114        |
| <br>                                                 |            |
| <b>თავი 4. ფართობი</b>                               | <b>117</b> |
| 4.1. მარტივი ფიგურის ფართობი                         | 118        |
| 4.2. სამკუთხედის ფართობი                             | 123        |
| 4.3. პარალელოგრამის ფართობი                          | 127        |
| 4.4. რომბის ფართობი                                  | 130        |
| 4.5. ტრაპეციის ფართობი                               | 133        |
| მეოთხე თავის მიმოხილვა                               | 135        |
| ტესტი №4                                             | 138        |
| საგნობრივი საძიებელი                                 | 141        |
| საცნობარო მასალა                                     | 142        |
| პასუხები                                             | 144        |

## სახელმძღვანელოში გამოყენებული პირობითი ნიშნები და რუბრიკები

### პირობითი ნიშნები



– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული სტანდარტული დავალებები



– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული არასტანდარტული (მაღალი კოგნიტური დონის) დავალებები



– განვლილი მასალის გასამეორებელი დავალებები



– დავალებები, რომელთა შესრულება ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების გამოყენებას საჭიროებს

### რუბრიკები

**ეს საინტერესოა!** – ისტორიული და შემეცნებითი შინაარსის ინფორმაცია

**შესაძლებელია თუ არა?**

**აბა, სცადე!**

} კვლევითი ხასიათის დავალებები

**ჯგუფური სამუშაო**

**წყვილებში სამუშაო**

} დავალებები, რომელთაც მოსწავლეთა ჯგუფები ან წყვილები ასრულებენ კლასში.

## თავი 2. გეომეტრიული გარდაქმნები. ოთხკუთხედები

### ამ თავში ისწავლი:

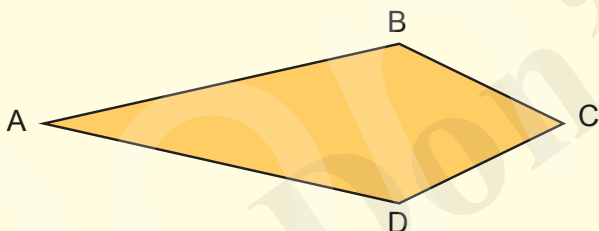
- ❖ გეომეტრიულ გარდაქმნებს: სიმეტრიას ცენტრის მიმართ, მობრუნებას;
- ❖ წრფეთა პარალელობის ნიშნებს;
- ❖ ოთხკუთხედების სახეებს: პარალელოგრამს, რომბს, მართკუთხედს, კვადრატს, ტრაპეციას;
- ❖ თაღის თეორემას;
- ❖ სამკუთხედისა და ტრაპეციის შუა ხაზის თვისებებს;
- ❖ მრავალკუთხედის კუთხეთა ჯამის გამოთვლას.

### თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- ❖ ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურების ამოცნობას და აგებას;
- ❖ მოცემული ფიგურის რაიმე კუთხით მობრუნებით მიღებული ფიგურის აგებას;
- ❖ პარალელური წრფეების ამოცნობასა და მათი თვისებების გამოყენებას;
- ❖ პარალელოგრამის, რომბის, მართკუთხედის, კვადრატისა და ტრაპეციის ამოცნობას და მათი თვისებების ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებას;
- ❖ მონაკვეთის ტოლ ნაწილებად დაყოფას;
- ❖ მრავალკუთხედის კუთხეების სიდიდეთა ჯამის გამოთვლას.

### აბა, სცადე!

ნახაზზე მოცემულ ოთხკუთხედში  $AB=AD$  და  $BC=CD$ . ასეთ ოთხკუთხედს ფრანი ეწოდება. დაამტკიცე, რომ თუ ფრანი ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურაა, მაშინ ის რომბია.



თაღეს მილეტელი  
ძვ.წ. 624-546 წწ.

თაღეს მილეტელი მიჩნეულია ფილოსოფიისა და მათემატიკის ფუძემდებლად



### პროექტი

„თაღესი – პირველი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი“

1. მოიძიე:

- ბიოგრაფიული ცნობები თაღესის შესახებ;
- თაღესის მათემატიკური აღმოჩენები;
- თაღესის ფილოსოფიური შეხედულებები;
- თაღესის მიერ მათემატიკის პრაქტიკული გამოყენების შემთხვევები.

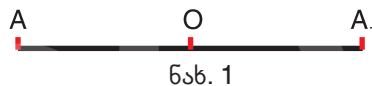
2. გააფორმე და მოამზადე პროექტი პრეზენტაციისთვის.



## 2.1 სიმეტრია ცენტრის მიმართ



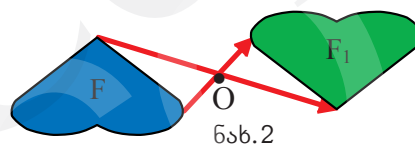
1. ცენტრული სიმეტრიისა და მისი თვისებების გაცნობა;
2. ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურების აგება.



სიბრტყეზე ავიღოთ  $O$  წერტილი. სიბრტყის რომელიმე  $A$  წერტილისათვის ავაგოთ  $A_1$  წერტილი შემდეგი წესით:  $A$  და  $O$  წერტილებზე გავავლოთ წრფე და მასზე  $O$  წერტილიდან  $A$  წერტილის მოპირდაპირე მხრეზე გადავზომოთ  $OA$ -ს ტოლი  $OA_1$  მონაკვეთი. მიღებულ  $A_1$  წერტილს  $O$  ცენტრის მიმართ  $A$  წერტილის **სიმეტრიული წერტილი** ეწოდება. თუ იმავე  $O$  წერტილის მიმართ  $A_1$  წერტილის სიმეტრიულ წერტილს ავაგებთ, ცხადია, იგი  $A$  წერტილს დაემთხვევა, ანუ  $A$  და  $A_1$  წერტილები  $O$  ცენტრის მიმართ **ურთიერთსიმეტრიული წერტილები**ა.

იმ ფაქტს, რომ  $A$  წერტილი  $O$  წერტილის მიმართ სიმეტრიით  $A_1$  წერტილში გადავიდა, ასე ჩაიწეროთ:  $O(A)=A_1$ .

თუ  $O$  წერტილის მიმართ სიმეტრიით  $F$  ფიგურა  $F_1$  ფიგურაში გადადის (ნახ.2), მაშინ  $F_1$  ფიგურას  $O$  ცენტრის მიმართ  $F$  ფიგურის **სიმეტრიული ფიგურა** ეწოდება. ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება:  $O(F)=F_1$ .

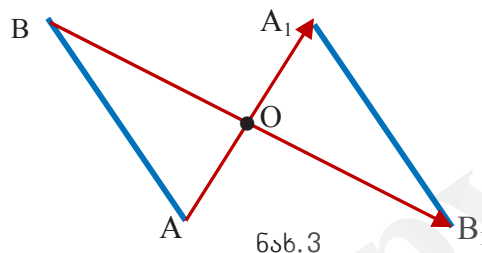


სიბრტყის გარდაქმნას, რომლის დროს ყოველი წერტილი მოცემული  $O$  წერტილის მიმართ სიმეტრიულ წერტილში გადადის, ეწოდება **ცენტრული სიმეტრია**  $O$  **ცენტრით**.

განვიხლოთ მოცემული ფიგურის ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურის აგების მაგალითები.

**მაგალითი 1.** ავაგოთ  $AB$  მონაკვეთის სიმეტრიული ფიგურა მოცემული  $O$  ცენტრის მიმართ.

**ამოხსნა.** საკმარისია,  $O$  ცენტრის მიმართ ავაგოთ  $A$  და  $B$  წერტილების სიმეტრიული  $A_1$  და  $B_1$  წერტილები (ნახ.3). მიღებული  $A_1B_1$  მონაკვეთი იქნება  $AB$  მონაკვეთის სიმეტრიული მონაკვეთი  $O$  ცენტრის მიმართ.



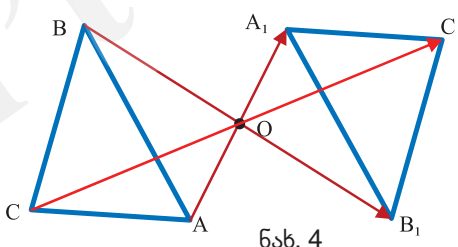
შევნიშნოთ, რომ ცენტრული სიმეტრიით მიღებული  $A_1B_1$  მონაკვეთი  $AB$  მონაკვეთის ტოლია. მართლაც,  $AO=A_1O$ ,  $BO=B_1O$ , ხოლო  $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ . სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნით  $AOB$  და  $A_1OB_1$  სამკუთხედები ტოლია და ამიტომ  $\angle AOB$  და  $\angle A_1OB_1$  კუთხეების პირდაპირ მდებარე გვერდები ტოლი იქნება. ე. ი.  $AB=A_1B_1$ . ამ შენიშვნიდან ვასკვნით, რომ:

**ცენტრული სიმეტრიით გარდაქმნისას წერტილებს შორის მანძილი არ იცვლება.**

**მაგალითი 2.** ავაგოთ  $ABC$  სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედი  $O$  ცენტრის მიმართ.

**ამოხსნა.** საკმარისია, ავაგოთ  $A$ ,  $B$  და  $C$  წერტილების სიმეტრიული  $A_1$ ,  $B_1$  და  $C_1$  წერტილები და შევაერთოთ ისინი ერთმანეთთან (ნახ.4).

რადგან ცენტრული სიმეტრიით წერტილებს შო-



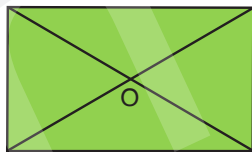


რის მანძილები არ იცვლება, ამიტომ  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$  და  $BC=B_1C_1$ . სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . ამ ტოლობიდან კი გამომდინარეობს, რომ  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ . ე.ი.

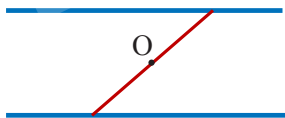
**ცენტრული სიმეტრიით გარდაქმნისას კუთხის სიდიდე არ იცვლება.**

საზოგადოდ,

**ცენტრული სიმეტრიით ყოველი ფიგურა ტოლ ფიგურაში გადადის.**



ნახ.5



ნახ.6

ფიგურას, რომელიც რაიმე  $O$  ცენტრის მიმართ სიმეტრიით თავის თავში გადადის, **ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურა** ეწოდება. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ  $O$  წერტილი ამ ფიგურის სიმეტრიის ცენტრს წარმოადგენს.

ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურის თვალსაჩინო მაგალითია წრე. მისი სიმეტრიის ცენტრი ამ წრის ცენტრია. ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურაა, აგრეთვე, მართკუთხედი (ნახ. 5). მისი სიმეტრიის ცენტრია დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.

წრფის ყოველი წერტილი ამ წრფის სიმეტრიის ცენტრია.

უამრავი სიმეტრიის ცენტრი აქვს, აგრეთვე, პარალელურ წრფეთა წყვილს. ამ შემთხვევაში სიმეტრიის ცენტრები იმ მონაკვეთების შუაწერტილებია, რომელთა ბოლოები პარალელურ წრფეებზე მდებარეობს (ნახ.6).

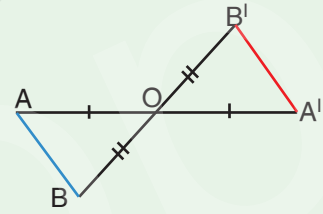
#### უპასუხე კითხვებს:

1. ფიგურათა რა სახის გარდაქმნები იცი?
2. როგორ გარდაქმნას ეწოდება სიმეტრია ცენტრის მიმართ?
3. როგორ ააგებ მოცემული ცენტრის მიმართ წერტილის სიმეტრიულ წერტილს?
4. როგორ ააგებ მოცემული ცენტრის მიმართ მონაკვეთის სიმეტრიულ მონაკვეთს?
5. როგორ ააგებ მოცემული ცენტრის მიმართ მრავალკუთხედის სიმეტრიულ მრავალკუთხედს?
6. როგორ ფიგურას ეწოდება ცენტრულად სიმეტრიული? მოიყვანე მაგალითები.
7. რა წერტილია მონაკვეთის სიმეტრიის ცენტრი?
8. რა წერტილია მართკუთხედის სიმეტრიის ცენტრი?
9. შეიძლება თუ არა, სამკუთხედს ჰქონდეს სიმეტრიის ცენტრი? ოთხკუთხედს?
10. რომელი ფიგურებია როგორც ცენტრულად, ისე ღერძულად სიმეტრიული?
11. რა წერტილია ორი გადაკვეთი წრფით შედგენილი ფიგურის სიმეტრიის ცენტრი?

## სავარჯიშოები

1

მოცემული ნახაზის მიხედვით ჩამოთვალე  $O$  ცენტრის მიმართ სიმეტრიული ფიგურები.



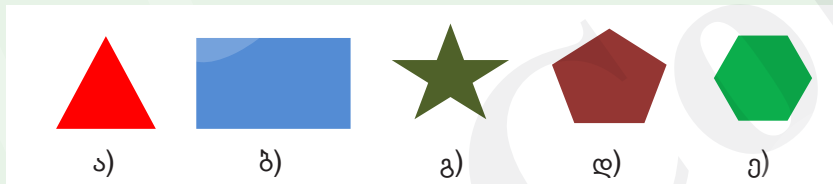
2

დახაზე:

- ა) მონაკვეთი და ააგე მისი ერთ-ერთი ბოლოს მიმართ სიმეტრიული მონაკვეთი;
- ბ) სამკუთხედი და ააგე მისი რომელიმე წვეროს მიმართ სიმეტრიული სამკუთხედი;
- გ) წრე და ააგე წრის გარეთ მდებარე წერტილის მიმართ მოცემული წრის სიმეტრიული წრე.

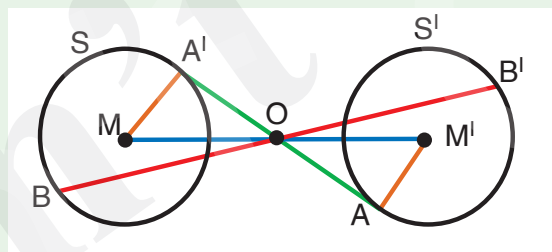
3

ნახაზზე მოცემული ფიგურებიდან რომელი ფიგურებია ცენტრულად სიმეტრიული? ღერძულად სიმეტრიული?



4

მოცემულ ნახაზზე რომელი მონაკვეთებია ტოლი?



5

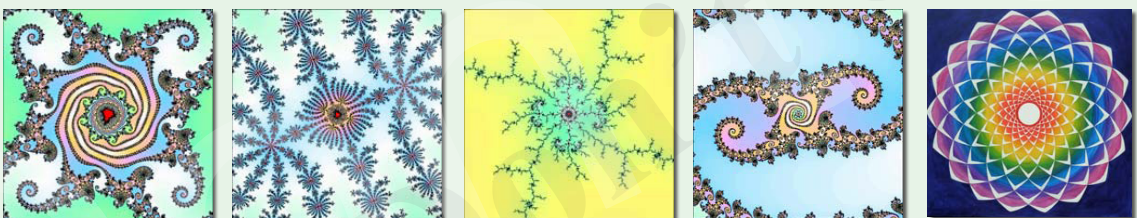
კვადრატის სიმეტრიის ცენტრიდან გვერდამდე მანძილი 3,5სმ-ს ტოლია. გამოთვალე კვადრატის პერიმეტრი და ფართობი.

6

მართკუთხედის სიმეტრიის ცენტრიდან გვერდებამდე მანძილებია 1,4სმ და 2,5სმ. გამოთვალე მართკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.

7

დააკვირდი ქვემოთ მოცემულ ცენტრულად სიმეტრიულ ფიგურებს. ამოიცანი, მათგან რომელია ღერძულად სიმეტრიულიც.



8

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია  $A(5; 4)$  წერტილი. იპოვე  $A$  წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები: ა) აბსცისათა ღერძის მიმართ; ბ) ორდინატთა ღერძის მიმართ; გ) კოორდინატთა სათავის მიმართ.

9

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია  $A(-2; 3)$  და  $B(1; -1)$  წერტილები. გამოთვალე იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც  $A$  წერტილის სიმეტრიულია  $B$  ცენტრის მიმართ.

10

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია  $A(-2; 3)$ ,  $B(1; -1)$  და  $C(1; 1)$  წერტილები. გამოთვალე  $\triangle ABC$ -ს მისივე  $B$  წვეროს მიმართ ცენტრულად სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროთა კოორდინატები.

11

დაამტკიცე, რომ თუ  $n$ -კუთხედს გააჩნია სიმეტრიის ცენტრი, მაშინ  $n$  ლუწი რიცხვია.

12

დაამტკიცე, რომ თუ სამკუთხედს სიმეტრიის ორი ღერძი აქვს, მაშინ აქვს მესამეც.

13

დაამტკიცე, რომ საკოორდინატო სიბრტყეში მოცემული  $A(x; y)$  წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიით  $A_1(-x; -y)$  წერტილში გადადის.

14

რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა საკოორდინატო სიბრტყეში მოცემული  $A(x; y)$  წერტილი, თუ მასზე ჯერ ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიით, ხოლო შემდეგ კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიით ვიმოქმედებთ?

15

რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა საკოორდინატო სიბრტყეში მოცემული  $A(x; y)$  წერტილი, თუ მასზე ჯერ  $P(a; b)$  პარალელური გადატანით, ხოლო შემდეგ კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიით ვიმოქმედებთ? (მითითება:  $P(a; b)$  პარალელურ გადატანას  $(c; d)$  კოორდინატების მქონე წერტილი  $(c+a; d+b)$  კოორდინატების მქონე წერტილში გადააქვს).

16

გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით:

ა)  $\frac{518^2 - 482^2}{360}$ ; ბ)  $\frac{638^2 - 662^2}{1300}$ ; გ)  $\frac{87^2 - 39^2}{19^2 - 37^2}$ ; დ)  $\frac{94^2 - 51^2}{65^2 - 22^2}$ .

17

28 მოსწავლიდან თითოეული ორი სპორტული სექციიდან ერთზე მაინც დადის: კალათბურთის სექციაზე – 19, ხოლო ფრენბურთის სექციაზე – 13 მოსწავლე. რამდენი მოსწავლეა დაკავებული ორივე სექციაში?

18

საკონტროლო წერა 32-მა მოსწავლემ დაწერა. ამოსახსნელი იყო ორი მაგალითი. პირველი მაგალითი სწორად ამოხსნა 29 მოსწავლემ, მეორე – 25-მა, ხოლო ვერც ერთი მაგალითი ვერ ამოხსნა ორმა მოსწავლემ. რამდენმა მოსწავლემ ამოხსნა ორივე მაგალითი?





19

სკოლის ჭადრაკის წრეში 38 მოაწავლეა გაერთიანებული, შაშის წრეში – 28. მათ შორის 16 მოსწავლე ორივე ამ წრეშია. რამდენი მოსწავლეა ჭადრაკისა და შაშის წრეებში სულ?

20

როდესაც ნორჩ რეინჯერთა წრეს 2 გოგონა შეემატა, წრეში ვაჟების წილი 60%-დან 50%-მდე შემცირდა. რამდენი მოსწავლეა ნორჩ რეინჯერთა წრეში გაერთიანებული?

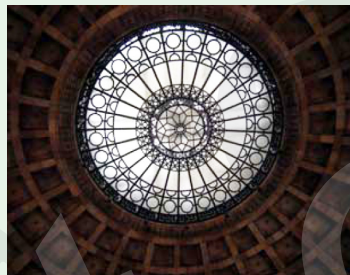
### ამოიცანი და აღწერე სიმეტრიული საგნები

სიმეტრიას ადამიანი უძველესი დროიდან იყენებს არქიტექტურაში, ორნამენტებში, ნაქარგებში, ნაქსოვებში, ჭურჭლის მოხატვაში, საყოფაცხოვრებო საგნებში, კედლებისა და იატაკის გაფორმებაში და ა. შ.

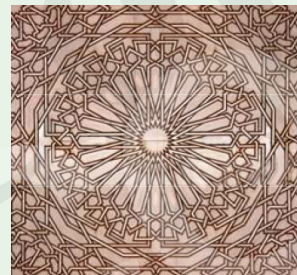
დააკვირდი ნაკეთობათა ნიმუშებს და დაადგინე სიმეტრიის რომელი სახეა გამოყენებული?



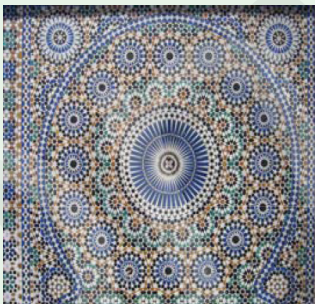
ქვაში ნაკვეთი ორნამენტი



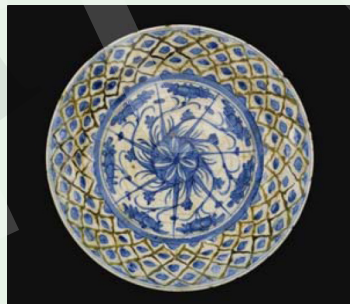
გუმბათი



მოზაიკა



შადრევნის მოზაიკა



სპარსული თეფში XVII ს.



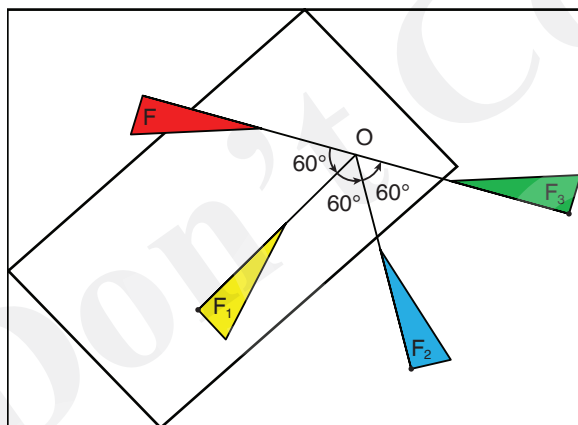
ხალიჩა



### პროექტი: „სიმეტრიის ნიმუშები ჩვენ გარშემო“

მოიძიე და აღწერე სიმეტრიის ნიმუშები შენ გარშემო არსებულ საგნებში, არქიტექტურასა და სახვით ხელოვნებაში. გამოიყენე ინტერნეტის საძიებო სისტემები.

## 2.2 მობრუნება და მისი თვისებები



### პრაქტიკული სამუშაო

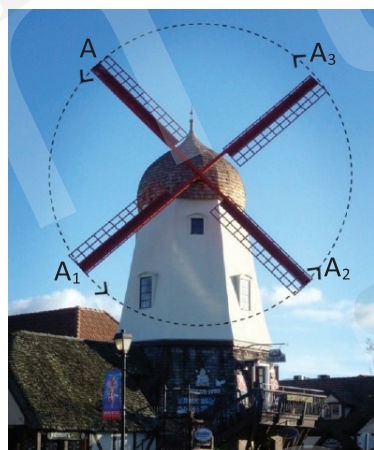
**მასალა:** ფურცელი, ფლომასტერი, გამჭვირვალე ქაღალდი, ასლის გადამღები ქაღალდი, ტრანსპორტირი, ქინძისთავი.

ფურცელზე დახაზე  $F$  ფიგურა (ვთქვათ, სამკუთხედი) და მის გარეთ მონიშნე  $O$  წერტილი. ფურცელს დააფარე გამჭვირვალე ქაღალდი და დაამაგრე ქინძისთავით  $O$  წერტილში. გამჭვირვალე ქაღალდზე ფლომასტერით გადაიღე  $F$  ფიგურის კონტური. გამჭვირვალე ქაღალდი თავისივე სიბრტყეში  $60^\circ$ -ით შემოაბრუნე.  $F$  ფიგურის გამოსახულება  $F_1$  მდებარეობაში გადაინაცვლებს.

ასლის გადამღები ფურცელი დადე გამჭვირვალე ქაღალდის ქვეშ და გადაიღე  $F_1$ -ის კონტური ფურცელზე. შენ უკვე ორი ფიგურა გაქვს ფურცელზე:  $F$  და  $F_1$ . ცდის შედეგად  $F$  ფიგურა  $60^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნების შედეგად გადაისახა  $F_1$  ფიგურაზე. ეს პროცესი შეგიძლია გააგრძელო,  $F_2$  და  $F_3$  ფიგურები მიიღო და გააფერადო.

ჩატარებული ცდა  $F$  ფიგურის  $F_1$  ფიგურაზე მობრუნებით ასახვის ერთი მაგალითია.

ქარის წისქვილის მუშაობისას  $A$  წერტილი  $A_1$  წერტილში  $90^\circ$ -იანი კუთხით,  $A_2$  წერტილში  $180^\circ$ -იანი კუთხით,  $A_3$ -ში  $270^\circ$ -იანი კუთხით, ხოლო თავის თავში  $360^\circ$ -იანი კუთხით შემობრუნებით გადადის.



მობრუნება  $O$  ცენტრითა და მობრუნების  $\alpha$  კუთხით განისაზღვრება.  $\alpha$  შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი.

$O$  ცენტრის მიმართ  $\alpha$  კუთხით მობრუნებისას სიბრტყის ყოველი  $A$  წერტილი ისეთ  $A_1$  წერტილში გადადის, რომ  $OA=OA_1$  და  $\angle AOA_1=|\alpha|$ . ამასთან, თუ  $\alpha>0$ , მაშინ მოძრაობა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო თუ  $\alpha<0$  – საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ.1).

იმისათვის რომ ავაგოთ  $A_1$  წერტილი, რომელიც მიიღება  $A$  წერტილის  $O$  ცენტრის მიმართ  $\alpha$  კუთხით მობრუნებით, საჭიროა:

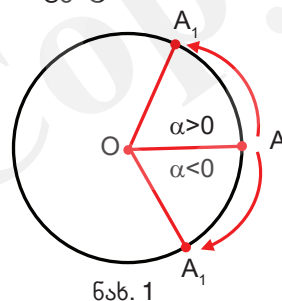
I. ავაგოთ წრეწირი  $O$  ცენტრითა და  $OA$  რადიუსით.

II.  $A$  წერტილი გადავაადგილოთ აგებულ წრეწირზე  $|\alpha|$  სიდიდის რკალით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, როცა  $\alpha>0$  და საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, როცა  $\alpha<0$  (ნახ. 1). მიღებული წერტილი არის საძიებელი  $A_1$  წერტილი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მობრუნების კუთხის სიდიდე  $180^\circ$ -ის ტოლია,  $AA_1$  აღმოჩნდება წრეწირის დიამეტრი, ამიტომ  $O$  წერტილი იქნება  $AA_1$  მონაკვეთის შუა წერტილი. ე.ი.  $A$  წერტილის  $180^\circ$ -ით მობრუნების შესასრულებლად საკმარისია ავაგოთ  $AA_1$  მონაკვეთი, რომლისთვისაც  $O$  იქნება შუა წერტილი (ნახ. 2).

$O$  ცენტრის მიმართ  $180^\circ$ -ით მობრუნება იგივე ცენტრული სიმეტრიაა.

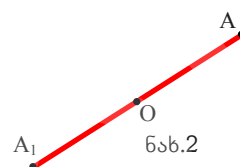
$F$  ფიგურის ბრუნვით ისეთი  $F_1$  ფიგურა მიიღება, რომელიც იმ წერტილებისაგან შედგება,



ნახ. 1

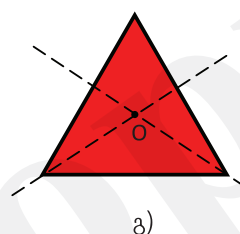
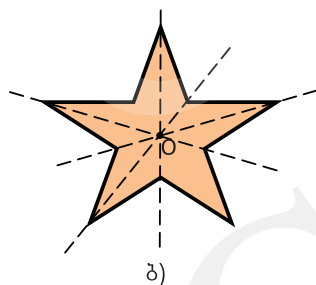
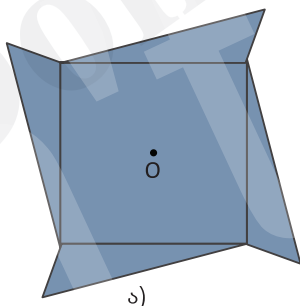
რომლებშიც  $F$  ფიგურის წერტილები გადაისახება  $O$  ცენტრის მიმართ  $\alpha$  კუთხით მობრუნებისას.

მრავალკუთხედის მობრუნებით მიღებული ფიგურის ასაგებად საკმარისია ავავოთ ამ მრავალკუთხედის წვეროების მობრუნებით მიღებული წერტილები და შევაერთოთ.

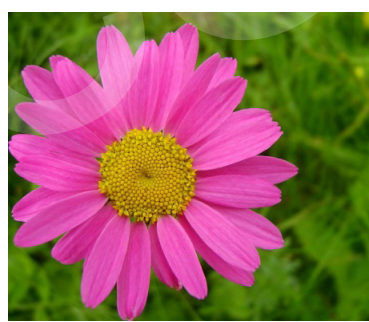
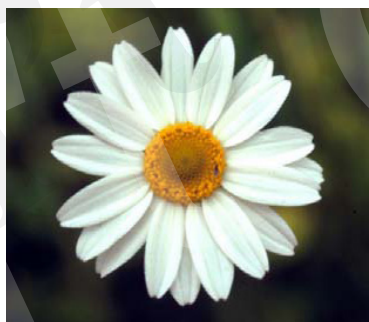


### ფიგურის მობრუნებით მისი ტოლი ფიგურა მიიღება.

ზოგიერთი ფიგურა, თუ მას გარკვეული წერტილის მიმართ გარკვეული კუთხით მოვაბრუნებთ, საკუთარ თავზე აისახება. ამის მაგალითები ნახაზზეა მოცემული.

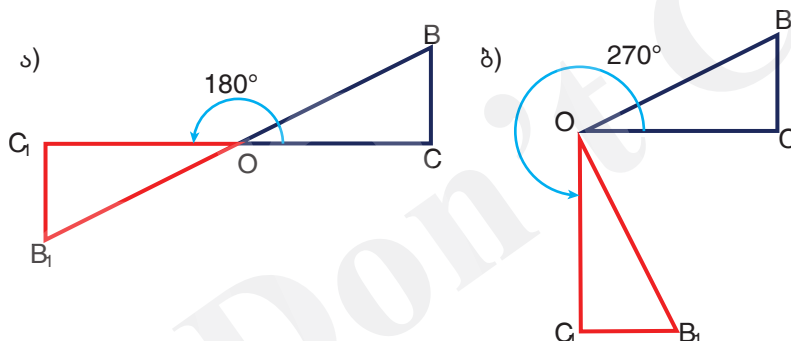


მობრუნების უმცირესი კუთხე იმისათვის, რომ მოცემული (ა, ბ, გ) ფიგურები თავის თავზე გადაისახოს, შესაბამისად არის: ა)  $360^\circ:4=90^\circ$ , ბ)  $360^\circ:5=72^\circ$ , გ)  $360^\circ:3=120^\circ$ . აღნიშნული თვისების ფიგურები მრავლადაა ბუნებასა და ტექნიკაში. მაგალითად, თოვლის ფიფქი, სხვადასხვა ყვავილი და სხვა.



**ამოცანა 1.** ავავოთ ფიგურა, რომელიც მიიღება  $OBC$  მართკუთხა სამკუთხედის  $O$  წერტილის მიმართ ა)  $180^\circ$ -ით, ბ)  $270^\circ$ -ით მობრუნებით.

**ამოხსნა.**



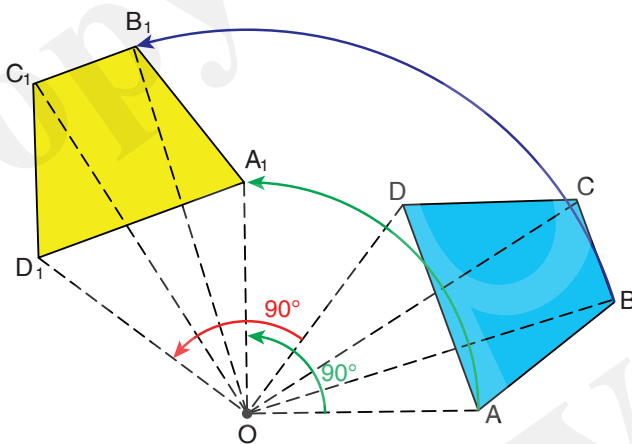


**ამოცანა 2.** ავაგოთ ABCD ოთხკუთხედის O ცენტრის მიმართ  $90^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნებით მიღებული ფიგურა.

**ამოხსნა.** ავაგოთ კუთხეები:

$$\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \angle COC_1 = \angle DOD_1 = 90^\circ.$$

O წერტილიდან  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OC_1$  და  $OD_1$  სხივებზე გადავზომოთ OA, OB, OC და OD მონაკვეთების ტოლი  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OC_1$  და  $OD_1$  მონაკვეთები. მივიღებთ  $A_1B_1C_1D_1$  ფიგურას, რომელიც ABCD ოთხკუთხედის  $90^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნებითაა მიღებული.



**ამოცანა 3.** რა სიდიდის კუთხეს ადგენენ საათის ისრები თერთმეტის ათ წუთზე?

**ამოხსნა.** ათ საათზე კუთხის სიდიდე საათის ისრებს შორის  $60^\circ$ -ის ტოლია. ათ წუთში წუთების მაჩვენებელი ისარი  $60^\circ$ -ით მობრუნდება. საათების მაჩვენებელი ისარი 12-ჯერ ნელა მოძრაობს, ვიდრე წუთების მაჩვენებელი ისარი, ამიტომ 10 წუთში ის 12-ჯერ ნაკლები კუთხით, ანუ  $5^\circ$ -ით მობრუნდება.

**პასუხი:** თერთმეტის ათ წუთზე საათის ისრებს შორის კუთხის სიდიდეა  $115^\circ$ .

#### უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება O ცენტრის მიმართ მობრუნება?
2. არის თუ არა ცენტრული სიმეტრია მობრუნების კერძო სახე?
3. ცვლის თუ არა მობრუნება ფიგურის სიდიდეს და ფორმას?
4. ფიგურათა რა სახის გარდაქმნები იცო?
5. როგორ იპოვი წერტილს, რომელიც მიიღება მოცემული წერტილის ცენტრის მიმართ  $45^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნებით?
6. როგორი ასახვაა მოცემული წერტილის მიმართ  $360^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნება?

#### სავარჯიშოები

1

მოცემულთაგან რომელი ფიგურა აისახება თავის თავზე,  $90^\circ$ -ით რომელიმე წერტილის მიმართ მობრუნებით?



ა)



ბ)



გ)



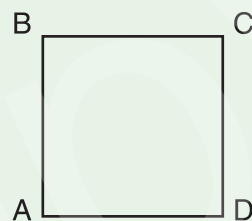
2

რა უმცირესი კუთხით უნდა მობრუნდეს ABCD კვადრატი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ, რომ A წერტილი გადავიდეს:

ა) B წერტილში?

ბ) C წერტილში?

გ) D წერტილში?

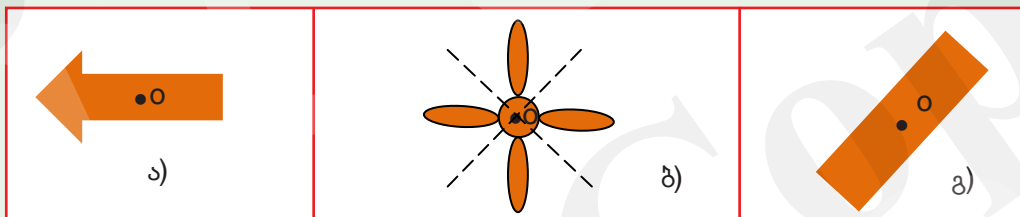


3

მონიშნე ფურცელზე M და N წერტილები. მოაბრუნე M წერტილი N ცენტრის მიმართ  $45^\circ$ -იანი კუთხით.

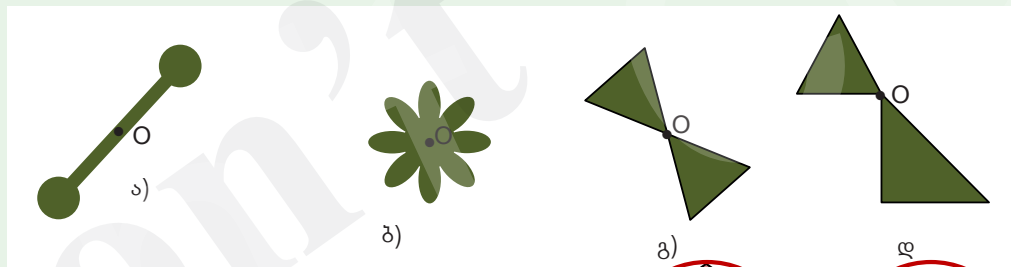
4

ააგე ფიგურა, რომელიც O წერტილის მიმართ მოცემული ფიგურის  $90^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნებით მიიღება.



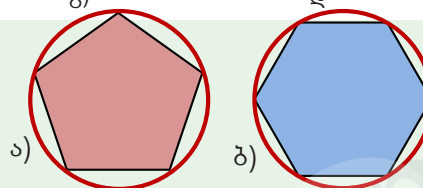
5

მოცემულთაგან რომელი ფიგურა აისახება მობრუნებით თავის თავზე, თუ მას O წერტილის მიმართ  $45^\circ$ -ით მოვაბრუნებთ?



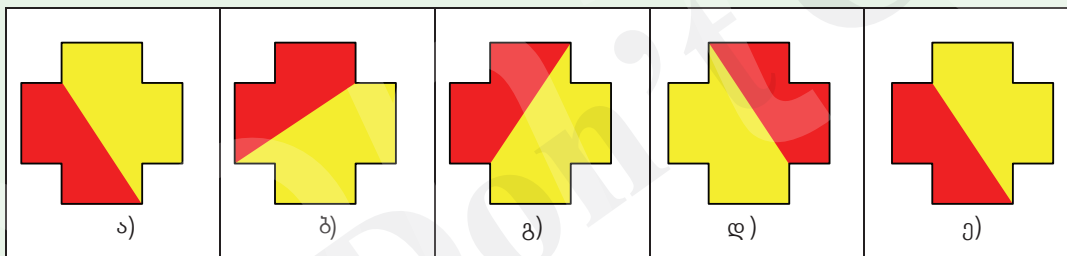
6

წრეწირის ცენტრის მიმართ რა უმცირესი კუთხით მობრუნებით აისახება მოცემული ფიგურა თავის თავზე?



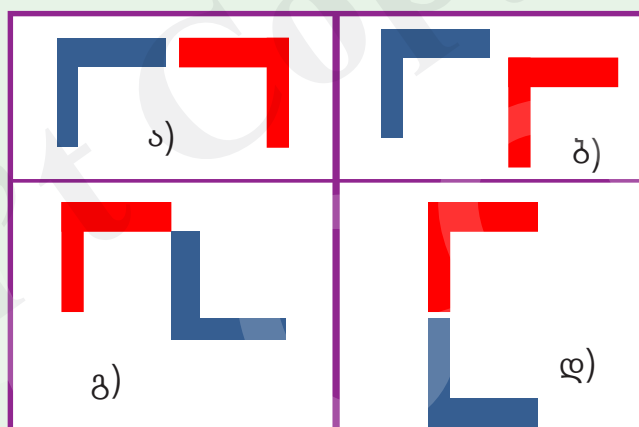
7

მოცემული ფიგურებიდან, რომელი ფიგურები მიიღება ა) ფიგურის მობრუნებით? დაადგინე მობრუნების კუთხის სიდიდე.



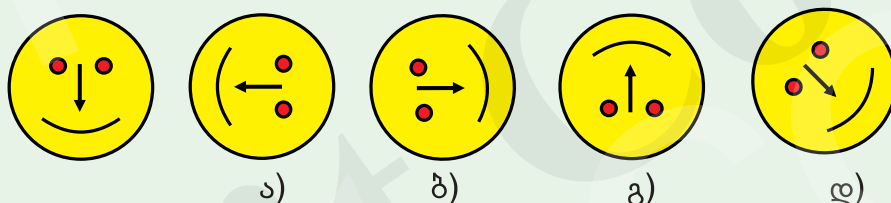
8

რა გარდაქმნის შედეგადაა ლურჯი ფიგურიდან წითელი ფიგურა მიღებული?



9

ქვემოთ მოცემული ა), ბ), გ), დ) ფიგურებიდან რომელია მიღებული მარცხნიდან პირველი ფიგურისაგან  $45^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნებით?



10

რა სიდიდის კუთხეს ადგენენ საათის ისრები ექვს საათზე? რვა საათზე?

11

რა სიდიდისაა კუთხე საათის ისრებს შორის ცხრის ოც წუთზე?

12

საათის პატარა ისარი 5სმ-ის სიგრძისაა, დიდი კი – 8სმ-ის. რას უდრის მაქსიმალური მანძილი ისრების ბოლოებს შორის?

13

საათის პატარა ისარი 5სმ-ის სიგრძისაა, დიდი კი – 8სმ-ის. რას უდრის მინიმალური მანძილი ისრების ბოლოებს შორის?

14

რამდენ ბრუნს ასრულებს ერთ დღე-ღამეში: ა) საათების მაჩვენებელი ისარი? ბ) წუთების მაჩვენებელი ისარი?

15

იპოვე A (1;0) წერტილის კოორდინატთა სათავის მიმართ ა)  $90^\circ$ -ით, ბ)  $180^\circ$ -ით, გ)  $270^\circ$ -ით, დ)  $360^\circ$ -ით მობრუნებით მიღებული წერტილის კოორდინატები.

16

იპოვე A (3;3) წერტილის კოორდინატთა სათავის მიმართ ა)  $90^\circ$ -ით, ბ)  $180^\circ$ -ით, გ)  $270^\circ$ -ით, დ)  $360^\circ$ -ით მობრუნებით მიღებული წერტილის კოორდინატები.

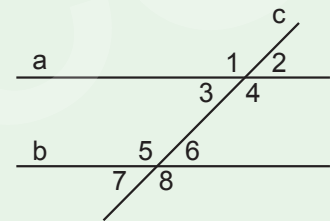
17

იპოვე A(2;3) წერტილის კოორდინატთა სათავის მიმართ ა)  $90^\circ$ -ით, ბ)  $180^\circ$ -ით, გ)  $270^\circ$ -ით, დ)  $360^\circ$ -ით მობრუნებით მიღებული წერტილის კოორდინატები.

18

რა უმცირესი დადებითი კუთხით მობრუნებით შეუთავსდება წესიერი n-კუთხედი თავის თავს?

- 19 თორმეტი საათიდან, სულ ცოტა, რამდენ წუთში შექმნის საათის ისრები  $77^\circ$ -ის ტოლ კუთხეს?
- 20 როგორ განლაგდებიან რიცხვით ღერძზე ტოლი მოდულის მქონე არატოლი რიცხვები?
- 21 არის თუ არა ნებისმიერი  $a$  და  $b$  რიცხვებისათვის ჭეშმარიტი უტოლობა?  
ა)  $a > -a$ ; ბ)  $a+b > a-b$ ; გ)  $2a > a$ ; დ)  $a+1 > a-1$ .
- 22 რამდენი მთელი რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობას:  
ა)  $|a| < 5$ ? ბ)  $|5a| < 7,5$ ?
- 23 შესაძლებელია თუ არა სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდებოდეს ერთმანეთს, როგორც: ა)  $1:2:3$ ? ბ)  $3:4:5$ ? გ)  $3:5:9$ ?
- 24 როგორაა  $A$ ,  $B$  და  $M$  წერტილები განლაგებული, თუ:  $AB=10$  სმ,  $AM=8$  სმ,  $BM=2$  სმ?
- 25 ორი პარალელური წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხე  $37^\circ$ -ის ტოლია. იპოვე დანარჩენი კუთხეების ზომები.
- 26 ორი პარალელური წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორეზე ა)  $40^\circ$ -ით დიდია; ბ) ორჯერ დიდია. იპოვე მათ შორის უმცირესი კუთხე.
- 27  $a$  და  $b$  პარალელური წრფეები გადაკვეთილია  $c$  წრფით. ნახაზის მიხედვით უპასუხეთ კითხვებს:  
ა) რომელი კუთხეებია ტოლი?  
ბ) რომელი კუთხეების სიდიდეთა ჯამია  $180^\circ$ ?
- 28 ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი შიგა კუთხის სიდიდეა  $40^\circ$ . გამოთვალე დანარჩენი შიგა კუთხეების ზომები.
- 29 ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხის სიდიდეა  $40^\circ$ . გამოთვალე შიგა კუთხეების ზომები.



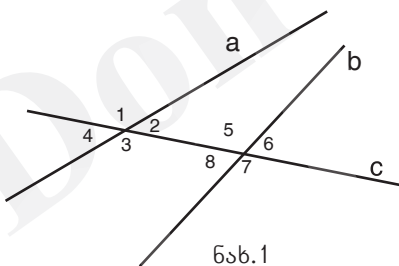
### შესაძლებელია თუ არა?

სამკუთხედის ერთ წვეროსთან არამდებარე ორი გარე კუთხის სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ$ -ის ტოლი იყოს?

## 2.3 პარალელური წრფეები



1. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების თვისებების გამოვლენა, განმტკიცება.
2. წრფეთა პარალელურობის ნიშნების შესწავლა და გამოყენება.

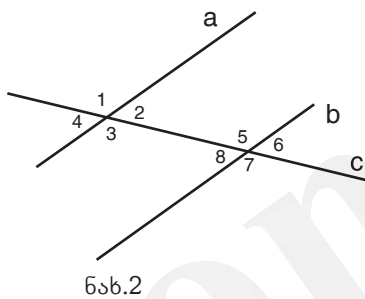


გავიხსენოთ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეების სახელწოდებები და თვისებები:

1-ლ ნახაზზე მოცემული ორი  $a$  და  $b$  წრფე გადაკვეთილია  $c$  წრფით.  $a$  და  $b$  წრფეებს შორის მოთავსებულ კუთხეებს **შიგა კუთხეები**, ხოლო ამ წრფეებს გარეთ მდებარე კუთხეებს **გარე კუთხეები** ეწოდება. მოცემული კუთხეები მათი მდებარეობის მიხედვით შეგვიძლია სხვადასხვანაირად დავაწყვილოთ:

$\angle 2$  და  $\angle 8$ ,  $\angle 3$  და  $\angle 5$  **შიგა ჯვარედინი**, ხოლო  $\angle 4$  და  $\angle 6$ ,  $\angle 1$  და  $\angle 7$  **გარე ჯვარედინი** კუთხეების წყვილებია;

$\angle 2$  და  $\angle 5$ ,  $\angle 3$  და  $\angle 8$  **შიგა ცალმხრივი**, ხოლო  $\angle 1$  და  $\angle 6$ ,  $\angle 4$  და  $\angle 7$  **გარე ცალმხრივი** კუთხეების წყვილებია;



$\angle 1$  და  $\angle 5$ ,  $\angle 2$  და  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  და  $\angle 7$ ,  $\angle 4$  და  $\angle 8$  **შესაბამის** კუთხეთა წყვილებია.

როგორც VII კლასის მასალიდან ვიცით, იმ შემთხვევაში, როცა ორი პარალელური წრფე იკვეთება მესამე წრფით (მე-2 ნახაზზე  $a$  და  $b$  პარალელური წრფეები გადაკვეთილია  $c$  წრფით), მაშინ:

ა) შესაბამისი კუთხეები ტოლია:  $\angle 1 = \angle 5$ ,  $\angle 2 = \angle 6$ ,  $\angle 3 = \angle 7$ ,  $\angle 4 = \angle 8$ ;

ბ) შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია:  $\angle 2 = \angle 8$ ,  $\angle 3 = \angle 5$ ;

გ) გარე ჯვარედინი კუთხეები ტოლია:  $\angle 4 = \angle 6$ ,  $\angle 1 = \angle 7$ ;

დ) შიგა ცალმხრივი კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ$ -ის ტოლია:  $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ ,  $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$ ;

ე) გარე ცალმხრივი კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ$ -ის ტოლია:  $\angle 1 + \angle 6 = 180^\circ$ ,  $\angle 4 + \angle 7 = 180^\circ$ .

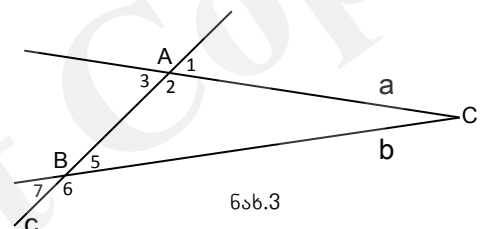
მართებულია შებრუნებული დებულებაც, კერძოდ:

**თეორემა.** თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას ზემოჩამოთვლილი ტოლობებიდან რომელიმე შესრულებული, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

**დამტკიცება.** პირველ რიგში, შევნიშნოთ, რომ თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას ზემოჩამოთვლილი ტოლობებიდან ერთი მაინც სრულდება, მაშინ ყველა დანარჩენი ტოლობაც შესრულდება (ახსენი, რატომ).

ამიტომ საკმარისია, წრფეთა პარალელობა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება, მაგალითად, ტოლობა  $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$  (ნახ.3).

დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, სრულდება  $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$  ტოლობა, მაგრამ  $a$  და  $b$  წრფეები არაპარალელურია. მაშინ ისინი გადაიკვეთებიან რაიმე  $C$  წერტილში და გამოვა, რომ  $ABC$  სამკუთხედში ორი შიგა კუთხის  $\angle 2$ -სა და  $\angle 5$ -ის ჯამი  $180^\circ$ -ია. ეს კი შეუძლებელია.





ლია, რადგან სამკუთხედში სამივე შიგა კუთხის სიდიდეთა ჯამია  $180^\circ$ . მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება  $a$  და  $b$  წრფეების არაპარალელურობის შესახებ მცდარია.

დამტკიცებულ თეორემას **წრფეთა პარალელულობის ნიშანი** ეწოდება.

#### უპასუხე კითხვებს:

1. ერთმანეთისადმი რა მდებარეობა შეიძლება ჰქონდეთ წრფეებს სიბრტყეზე?
2. რა თვისება აქვთ ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას: ა) შიგა ჯვარედინ კუთხეებს? ბ) შიდა ცალმხრივ კუთხეებს?
3. რაში მდგომარეობს წრფეთა პარალელულობის ნიშანი: ა) შესაბამისი კუთხეების მიხედვით? ბ) შიგა ჯვარედინი კუთხეების მიხედვით?
4. მართებულია თუ არა, რომ თუ ორი წრფე ერთმანეთს არ კვეთს, მაშინ ისინი პარალელურია?
5. შეიძლება თუ არა, რომ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ცალმხრივ-მდებარე კუთხეები ტოლი იყოს?
6. შეიძლება თუ არა, რომ ორი წრფის მესამით გადაკვეთისას მიღებული ყველა კუთხე ტოლი იყოს?

#### სავარჯიშოები

1. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხის სიდიდეა  $60^\circ$ . გამოთვალე დანარჩენი კუთხეების სიდიდეები.
2. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე მართია. გამოთვალე დანარჩენი კუთხეების სიდიდეები.
3. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის სიდიდეთა სხვაობა  $50^\circ$ -ის ტოლია. გამოთვალე ეს კუთხეები.
4. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის სიდიდეთა ჯამი  $90^\circ$ -ის ტოლია. გამოთვალე ეს კუთხეები.
5. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხის სიდიდე მეორეზე 3-ჯერ მეტია. გამოთვალე ეს კუთხეები.
6. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის სიდიდეთა შეფარდებაა 2:7. გამოთვალე ეს კუთხეები.
7. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხის სიდიდე მეორის 0,8 ნაწილია. გამოთვალე ეს კუთხეები.
8. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხის სიდიდე მეორის 25%-ია. გამოთვალე ეს კუთხეები.

9

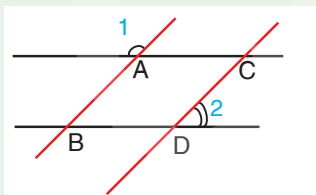
დაამტკიცე, რომ თუ წრფე ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ მეორის მართობულიცაა.

10

დაამტკიცე, რომ თუ ორი წრფიდან თითოეული მესამე წრფის მართობულია, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

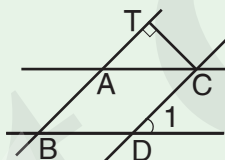
11

AC და BD პარალელური წრფეები გადაკვეთილია AB და CD პარალელური წრფეებით, ამასთან  $\angle 1 = 155^\circ$ . გამოთვალე  $\angle 2$ -ის სიდიდე.



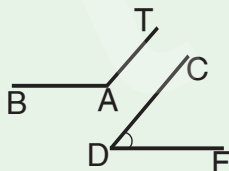
12

AC და BD პარალელური წრფეები გადაკვეთილია AB და CD პარალელური წრფეებით, ამასთან,  $\angle 1 = 55^\circ$ . გამოთვალე  $\triangle ATC$ -ს კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ  $\angle ATC = 90^\circ$ .



13

BAT და CDF კუთხეების გვერდების გაგრძელებებით პარალელურ წრფეთა ორი წყვილია შექმნილი. ამასთან, CDF კუთხის სიდიდე BAT კუთხის სიდიდის 25%-ს უდრის. გამოთვალე თითოეული კუთხის სიდიდე.



14

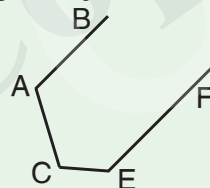
დაამტკიცე, რომ თუ ორი კუთხის გვერდების გაგრძელებები პარალელურ წრფეთა ორ წყვილს ქმნის, მაშინ ეს კუთხეები ან ტოლია, ან მათი სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ$ -ია.

15

ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული სამი შიგა კუთხის ჯამია  $280^\circ$ . გამოთვალე მეოთხე შიგა კუთხის სიდიდე.

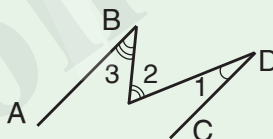
16

გამოთვალე ACE კუთხის სიდიდე, თუ ცნობილია, რომ AB და EF წრფეები პარალელურია,  $\angle BAC = 115^\circ$  და  $\angle CEF = 105^\circ$ .



17

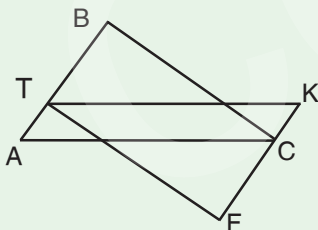
ნახაზზე მოცემული AB და CD პარალელური წრფეებია. დაამტკიცე ტოლობა:  $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2$ .



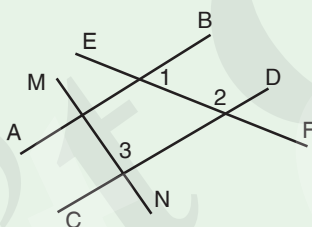
- 18 AB და CD პარალელური წრფეებია. გამოთვალე BMC კუთხის სიდიდე, თუ  $\angle ABM=125^\circ$  და  $\angle MCD=115^\circ$ .



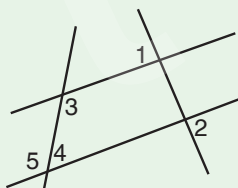
- 19 ნახაზზე გამოსახულია ტოლი ABC და FTK სამკუთხედები, ამასთან,  $AC \parallel TK$  და  $BC \parallel TF$  დაასახელე ამ სამკუთხედებში ტოლი კუთხეებისა და ტოლი გვერდების წყვილები.



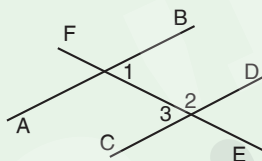
- 20 ნახაზზე მოცემული AB და CD წრფეების EF წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან  $\angle 1=27^\circ$ ,  $\angle 2=153^\circ$ . გამოთვალე AB და CD წრფეების MN წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები, თუ  $\angle 3=93^\circ$ .



- 21 მოცემულია:  $\angle 1=\angle 2$ . დაამტკიცე, რომ: ა)  $\angle 3=\angle 5$ ; ბ)  $\angle 3+\angle 4=180^\circ$ .



- 22 ნახაზზე მოცემული AB და CD წრფეების EF წრფით გადაკვეთისას  $\angle 1=\angle 2-\angle 3=60^\circ$ . არის თუ არა AB წრფე CD წრფის პარალელური? პასუხი დაასაბუთე.



- 23 დაამტკიცე, რომ ურთიერთმართობული წრფეების პარალელური წრფეები მართი კუთხით გადაიკვეთება.

- 24 დაამტკიცე, რომ თუ სამკუთხედის გარე კუთხის ბისექტრისა სამკუთხედის გვერდის პარალელურია, მაშინ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

**25** AB და CD წრფეების მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული რვა კუთხიდან ოთხის სიდიდე არის  $80^\circ$ , დანარჩენი ოთხის კი  $-100^\circ$ . შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ AB და CD წრფეები პარალელურია? პასუხი დაასაბუთე.

**26** მოცემულია თეორემა: თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით, მაშინ შესაბამისი კუთხეების ბისექტრისები პარალელურია.

ა) დაამტკიცე მოცემული თეორემის მართებულობა;  
 ბ) გაარკვიე, მართებულია თუ არა შებრუნებული თეორემა: თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული შესაბამისი კუთხეების ბისექტრისები პარალელურია, მაშინ ეს ორი წრფეც პარალელურია.

**27** მოცემულია თეორემა: თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით, მაშინ შიგა ცალმხრივი კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთმართობულია.

ა) დაამტკიცე მოცემული თეორემის მართებულობა;  
 ბ) გაარკვიე, მართებულია თუ არა შებრუნებული თეორემა: თუ ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივი კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთმართობულია, მაშინ ეს ორი წრფეც პარალელურია.

**28** ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან სამის სიდიდეა  $127^\circ$ ,  $53^\circ$  და  $70^\circ$ . გამოთვალე დანარჩენი ხუთი კუთხის სიდიდე.

**29** x და y პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია. იპოვე პროპორციულობის კოეფიციენტი და გაარკვიე, რა რიცხვებია ცხრილში გამოტოვებული.

|    |   |    |      |     |    |     |
|----|---|----|------|-----|----|-----|
| ა) | x | 32 | 7,2  |     | 10 | 2,4 |
|    | y |    | 14,4 | 7,6 |    |     |

|    |   |     |   |      |      |     |
|----|---|-----|---|------|------|-----|
| ბ) | x | 1,1 |   | 3,5  |      | 2,3 |
|    | y |     | 6 | 10,5 | 38,1 |     |

**30** ჩაწერე სტანდარტული ფორმით მრავალწევრი:

ა)  $(3,15x^2 - 4,8x + 3) - (-1,75x^2 + 4,2x + 8)$ ; ბ)  $8,4m^2 - (6,4m - 11) + (8,4m^2 + 11m - 7)$ .

**31** იყოფა თუ არა უნაშთოდ 4-ზე ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი?

**32** გამოთვალე ყველა იმ მთელი რიცხვის ა) ჯამი; ბ) ნამრავლი, რომელთა მოდული ნაკლებია 7-ზე.

**33** მოცემულია:  $x \cdot y > 0$  და  $y \cdot z < 0$ . რომელია მეტი:  $x \cdot z$  თუ 0?

### აბა სცადე!

ჩამოაყალიბე და დაამტკიცე 24-ე სავარჯიშოში მოცემულის შებრუნებული დებულება.



## 2.4 პარალელოგრამის თვისებები



1. ოთხკუთხედების კლასიფიკაციის გაცნობა;
2. პარალელოგრამის დიაგონალების, მოპირდაპირე გვერდებისა და კუთხეების თვისებების შესწავლა და გამოყენება.

ოთხკუთხედების სიმრავლე გვერდების განლაგების მიხედვით სამ თანაუკვეთ ქვესიმრავლედ იყოფა:

- I. ოთხკუთხედები, რომელთაც პარალელური გვერდების ორი წყვილი აქვთ;
- II. ოთხკუთხედები, რომელთაც პარალელური გვერდების მხოლოდ ერთი წყვილი აქვთ;
- III. ოთხკუთხედები, რომელთაც პარალელური გვერდები არ გააჩნიათ.

პირველ რიგში, დავადგინოთ ყველა ოთხკუთხედის საერთო თვისება. კერძოდ:

**თეორემა 1.** ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $360^\circ$ -ის ტოლია.

**დამტკიცება.**

განვიხილოთ ABCD ოთხკუთხედი. იგი BD დიაგონალით ორ სამკუთხედად იყოფა (ნახ. 1). ვიცით, რომ თითოეული მათგანის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ$ -ია, ანუ

$$\angle ABD + \angle ADB + \angle BAD = 180^\circ;$$

$$\angle CBD + \angle CDB + \angle BCD = 180^\circ.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ:

$$\angle ABD + \angle ADB + \angle BAD + \angle CBD + \angle CDB + \angle BCD = 360^\circ. \quad (1)$$

ვინაიდან  $\angle ABD + \angle CBD = \angle ABC$ ;  $\angle ADB + \angle CDB = \angle ADC$ ,

ამიტომ (1) ტოლობა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

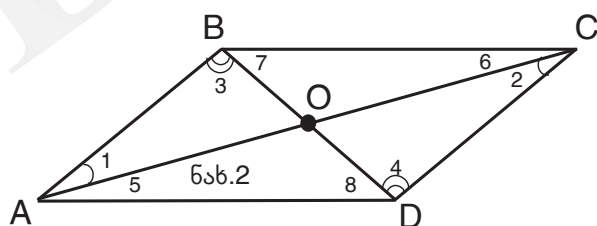
$$\angle ABC + \angle BCD + \angle ADC + \angle BAD = 360^\circ. \text{ რის დამტკიცებაც გვინდოდა.}$$

ოთხკუთხედს, რომელსაც პარალელური გვერდების ორი წყვილი აქვს, **პარალელოგრამი** ეწოდება.

დავამტკიცოთ პარალელოგრამის ძირითადი თვისებები:

**თეორემა 2.** პარალელოგრამის

- ა) მოპირდაპირე გვერდები ტოლია;
- ბ) მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია;
- გ) დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.
- დ) ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი  $180^\circ$ -ის ტოლია.



მოც: ABCD ოთხკუთხედი,  
 $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ .

უ.დ. ა)  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ ;

ბ)  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ ;

გ)  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ .

**დამტკიცება:** განვიხილოთ  $\triangle ABC$  და

$\triangle CDA$  (ნახ.2). ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია, ამიტომ  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 5 = \angle 6$ , AC გვერდი ამ სამკუთხედების საერთო გვერდია. აქედან ვასკვნით, რომ  $\triangle ABC = \triangle CDA$  (ერთი გვერდითა და მასთან მიმდებარე ორი კუთხით). ტოლ სამკუთხედებში ტოლი კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები ტოლია და, პირიქით, ტოლი გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ამიტომ  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ ,  $\angle ABC = \angle ADC$ . ამასთან,  $\angle 1 + \angle 5 = \angle 2 + \angle 6$ , ანუ  $\angle BAD = \angle BCD$ .

იმავე ნახაზზე განვიხილოთ  $\triangle AOB$  და  $\triangle COD$ .  $AB=CD$ ,  $\angle 1=\angle 2$ ,  $\angle 3=\angle 4$ , ამიტომ ეს სამკუთხედები ტოლია. აქედან კი ვასკვნით, რომ  $OB=OD$ ,  $OA=OC$ . ამით თეორემის ა), ბ), გ) პუნქტების დამტკიცება დასრულებულია. დ) პუნქტი დაამტკიცე დამოუკიდებლად.

### უპასუხე კითხვებს:

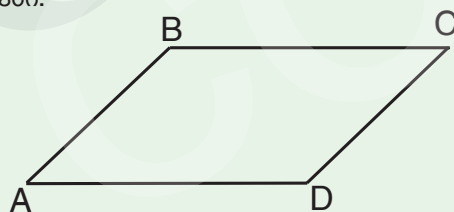
1. რას უდრის ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი?
2. ყველაზე მეტი, რამდენი ბლაგვი კუთხე შეიძლება ჰქონდეს ოთხკუთხედს? მახვილი?
3. რას ეწოდება პარალელოგრამი?
4. რა თვისება აქვს პარალელოგრამის:
  - ა) მოპირდაპირე გვერდებს? ბ) მოპირდაპირე კუთხეებს? გ) დიაგონალებს?
5. რა თვისება აქვს პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეებს?
6. არის თუ არა დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრი? (პასუხი დაასაბუთე).

### სავარჯიშოები

1

ისარგებლე მე-3 ნახაზით და შეავსე გამონათქვამი:

- ა) ABCD პარალელოგრამში ----- მოპირდაპირე გვერდებია;
- ბ) ABCD პარალელოგრამში ----- მოპირდაპირე კუთხეებია;
- გ) ABCD პარალელოგრამში ----- ტოლი გვერდებია;



- დ) ABCD პარალელოგრამში ----- პარალელური გვერდებია;
- ე) პარალელოგრამის ----- გვერდები ტოლია;
- ვ) პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები -----;
- ზ) პარალელოგრამის ----- გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა;
- თ) პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი პარალელოგრამის ----- ცენტრია.

2

გამოთვალე ოთხკუთხედის კუთხეები, თუ მათი სიდიდეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3:4:7.

3

ABCD ოთხკუთხედში  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B:\angle C:\angle D=2:3:5$ . გამოთვალე ოთხკუთხედის უდიდესი კუთხე.

4

გამოთვალე პარალელოგრამის კუთხეები, თუ ორი მათგანი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2.

5

პარალელოგრამის პერიმეტრი 80 სმ-ის ტოლია. გამოთვალე პარალელოგრამის გვერდების სიგრძე, თუ ერთი გვერდი: ა) მეორეზე 3-ჯერ დიდია; ბ) მეორეზე 20 სმ-ით მეტია; გ) მეორე გვერდის 20%-ია; დ) პერიმეტრის 0,4 ნაწილია.

6

გამოთვალე პარალელოგრამის კუთხეები, თუ:

- ა) ერთი მათგანის სიდიდე  $60^\circ$ -ია; ბ) ორი მათგანის სიდიდეთა ჯამი  $60^\circ$ -ია;  
გ) ორი მათგანის სიდიდეთა სხვაობა  $60^\circ$ -ია; დ) ორი მათგანის ფარდობაა 1:5.

7

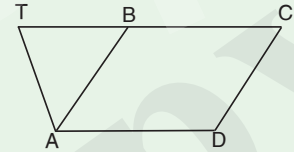
იპოვე პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხეების ჯამი, თუ პარალელოგრამის მცირე კუთხის სიდიდე დიდი კუთხის სიდიდის  $\frac{5}{13}$  ნაწილია.

8

პარალელოგრამის დიაგონალი გვერდებთან 34 და 31-გრადუსიან კუთხეებს ადგენს. იპოვე პარალელოგრამის კუთხეები.

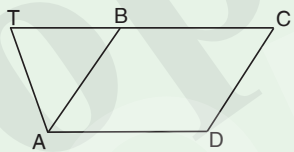
9

ნახაზზე მოცემულია ABCD პარალელოგრამი. CB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია T წერტილი ისე, რომ  $AT=AB$  და  $\angle BAT=44^\circ$ . გამოთვალე პარალელოგრამის კუთხეები.



10

ნახაზზე მოცემულია ABCD პარალელოგრამი. CB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია T წერტილი ისე, რომ  $AT=AB$ . გამოთვალე  $\triangle ABT$ -ს პერიმეტრი, თუ  $CD=10$  სმ, ხოლო  $\angle C=60^\circ$ .



11

გამოთვალე კუთხე პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისებს შორის.

12

პარალელოგრამიდან მისი დიაგონალის მიერ ჩამოჭრილი სამკუთხედის პერიმეტრი 30 სმ-ის, პარალელოგრამის პერიმეტრი კი – 35 სმ-ის ტოლია. გამოთვალე დიაგონალის სიგრძე.

13

პარალელოგრამის ერთი გვერდის სიგრძე 4 სმ-ის, ხოლო ორი მოსაზღვრე გვერდის სიგრძეებს შორის სხვაობა 12 სმ-ის ტოლია. გამოთვალე პარალელოგრამის პერიმეტრი.

14

დაამტკიცე, რომ კუთხის ბისექტრისა პარალელოგრამს ტოლფერდა სამკუთხედს ჩამოჭრის.

15

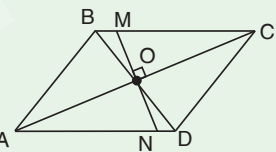
პარალელოგრამის კუთხის ბისექტრისა მის ერთ-ერთ გვერდს 3 სმ და 5 სმ სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. გამოთვალე პარალელოგრამის პერიმეტრი (განიხილე ორი შემთხვევა).

16

დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი მონაკვეთი, რომლის ბოლოები პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდებს ეკუთვნის და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადის, ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

17

ნახაზზე მოცემულია ABCD პარალელოგრამი. MN მონაკვეთი დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე AC დიაგონალის მართობულად გადის.  $CM=5$  სმ. იპოვე: ა) მანძილი C და N წერტილებს შორის; ბ) AMCN ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



- 18 ABCD პარალელოგრამის A და D კუთხეების ბისექტრისები BC წრფეს, შესაბამისად, M და N წერტილებში კვეთენ. გამოთვალე MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ:
- ა)  $AB=5\text{სმ}$ ,  $BC=12\text{სმ}$ ;      ბ)  $AB=9\text{სმ}$ ,  $BC=13\text{სმ}$ ;  
გ)  $AB=7\text{სმ}$ ,  $BC=14\text{სმ}$ ;      დ)  $AB=20\text{სმ}$ ,  $BC=8\text{სმ}$ .

- 19 მოცემულია ორი წინადადება:  
A: „ABCD ოთხკუთხედი პარალელოგრამია“;  
B: „AC დიაგონალით ABCD ოთხკუთხედი ორ ტოლ სამკუთხედად იყოფა“.  
რომელია ჭეშმარიტი:  
„თუ A, მაშინ B“, თუ მისი შებრუნებული: „თუ B, მაშინ A“?

- 20 ქსოვილის ნაჭერი, რომლის სიგრძე 65მ-ია, ხოლო სიგანე 1მ 25სმ, 3750 ლარი ღირს. რა ეღირება 91მ სიგრძისა და 1მ 45სმ სიგანის ასეთივე ხარისხის ქსოვილი?

### პრაქტიკული სამუშაო

- 1 დახაზე ABC სამკუთხედი. გაავლე AD მედიანა და მის გაგრძელებაზე მონიშნე K წერტილი ისე, რომ  $AD=DK$ . დაამტკიცე, რომ ABKC ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
- 2 დახაზე და გამოჭერი ორი ტოლი სამკუთხედი. ეს სამკუთხედები მიადგი ერთმანეთს ისე, რომ მიიღო:
- ა) პარალელოგრამი; ბ) ოთხკუთხედი, რომელიც არაა პარალელოგრამი.  
როგორი სამკუთხედი გამოდგება ამ დავალებების შესასრულებლად?
- 3 გამოჭერი ოთხი ისეთი სამკუთხედი, რომელთა ერთმანეთთან მიდგმით მიიღება პარალელოგრამი.
- 4 დახაზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. მონიშნე წერტილები კოორდინატებით:  $(-1; 1)$ ,  $(3; 1)$  და  $(-3; -2)$ . შეარჩიე მეოთხე წერტილის კოორდინატები ისე, რომ მიღებული ოთხი წერტილი პარალელოგრამის წვეროებს წარმოადგენდეს. რამდენი ასეთი პარალელოგრამი არსებობს?



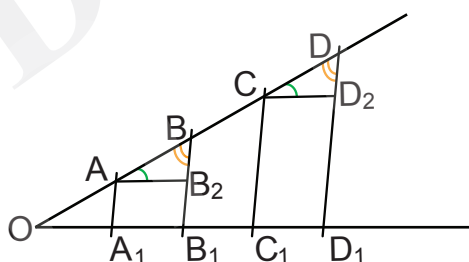
## 2.5 თაღის თეორემა



1. თაღის თეორემის შესწავლა და გამოყენება;
2. სამკუთხედის შუახაზის თვისებების შესწავლა და გამოყენება.

**თეორემა 1.** (თაღის თეორემა) ვთქვათ, კუთხის ერთ გვერდზე მდებარე  $A, B, C$  და  $D$  წერტილებზე გავლებული პარალელური წრფეები კუთხის მეორე გვერდს შესაბამისად  $A_1, B_1, C_1$  და  $D_1$  წერტილებში გადაკვეთენ. თუ  $AB=CD$ , მაშინ  $A_1B_1=C_1D_1$ .

**დამტკიცება.**  $A$  და  $C$  წერტილებზე გავავლოთ  $O$  კუთხის მეორე გვერდის პარალელური წრფეები (ნახ. 1). მივიღეთ ორი პარალელოგრამი:  $AB_2B_1A_1$  და  $CD_2D_1C_1$ . პარალელოგრამის თვისების თანახმად,  $AB_2=A_1B_1$  და  $CD_2=C_1D_1$ . დასამტკიცებელი დაგვრჩა  $AB_2=CD_2$  ტოლობა.

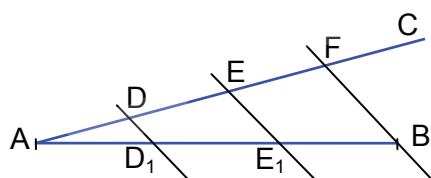


ნახ. 1

განვიხილოთ სამკუთხედები:  $AB_2B$  და  $CD_2D$ . მოცემულობის თანახმად,  $AB=CD$ ,  $\angle ABB_2=\angle CDD_2$  როგორც  $BB_1$  და  $DD_1$  პარალელური წრფეების  $BD$  წრფით გადაკვეთისას მიღებული შესაბამისი კუთხეები.  $\angle BAB_2=\angle DCD_2$ , როგორც  $AB_2$  და  $CD_2$  პარალელური წრფეების  $AD$  წრფით გადაკვეთისას მიღებული შესაბამისი კუთხეები. მაშასადამე, სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად,  $\triangle ABB_2=\triangle CDD_2$  საიდანაც,  $AB_2=CD_2$ . ამით თეორემა დამტკიცებულია.

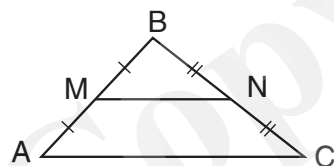
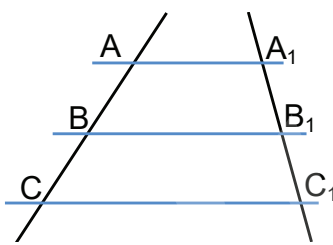
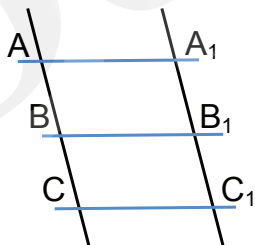
**ამოცანა.** მოცემული  $AB$  მონაკვეთი გავყოთ ერთმანეთის ტოლ სამ მონაკვეთად.

**ამოხსნა.**  $A$  წერტილზე გავავლოთ  $AC$  სხივი და მასზე მიმდევრობით ავაგოთ ერთმანეთის ტოლი სამი მონაკვეთი:  $AD=DE=EF$  (ნახ. 2). გავავლოთ  $FB$  წრფე.  $D$  და  $E$  წერტილებზე გავავლოთ  $FB$  წრფის პარალელური წრფეები. თაღის თეორემის თანახმად,  $AB$  მონაკვეთი სამ ტოლ ნაწილად გაიყო ( $AD_1=D_1E_1=E_1B$ ).



ნახ. 2

**შენიშვნა:** თაღის თეორემის პირობაში, კუთხის გვერდების ნაცვლად, შეგვიძლია, ავიღოთ ნებისმიერი ორი წრფე. დამოუკიდებლად სცადე თეორემის ჩამოყალიბება და დამტკიცება როგორც პარალელური, ისე გადამკვეთი წრფეებისათვის.



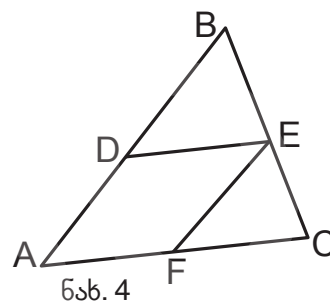
ნახ. 3

სამკუთხედის ორი გვერდის შუა წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს **სამკუთხედის შუახაზი** ეწოდება. მე-3 ნახაზზე  $MN$  მონაკვეთი  $ABC$  სამკუთხედის შუახაზია.

**თეორემა 2.** სამკუთხედის შუახაზი მესამე გვერდის პარალელურია და მისი ნახევრის ტოლია.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ  $\triangle ABC$ . აღვნიშნოთ  $AB$  გვერდის შუა წერტილი  $D$  ასოთი და მასზე გავავლოთ  $AC$  გვერდის პარალელური წრფე (ნახ. 4). ამ წრფის  $BC$  გვერდთან გადაკვეთის წერტილი  $E$  ასოთი აღვნიშნოთ. თაღის თეორემის თანახმად, რადგან  $AD=DB$ , ამიტომ  $EC=BE$ . ე.ი.  $E$  წერტილი  $BC$  გვერდის შუა წერტილია, ანუ  $DE$  მონაკვეთი, რომელიც აგების თანახმად,  $AC$  გვერდის პარალელურია,  $\triangle ABC$ -ის შუახაზია. ამით თეორემის ერთი ნაწილი დამტკიცებულია.

E წერტილზე გავავლოთ AD-ს პარალელური წრფე და მისი AC გვერდთან გადაკვეთის წერტილი F ასოთი აღვნიშნოთ. ვინაიდან E წერტილი BC გვერდის შუა წერტილია, თაღისის თეორემის თანახმად, F იქნება AC გვერდის შუა წერტილი, ე.ი.  $AF = FC = \frac{1}{2}AC$ . ADEF ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ამიტომ  $AF = DE$ , შესაბამისად,  $DE = \frac{1}{2}AC$ . თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

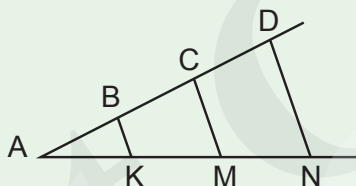


#### უპასუხე კითხვებს:

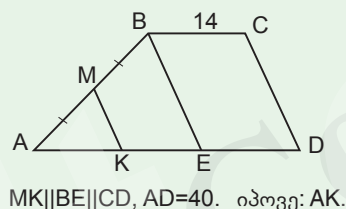
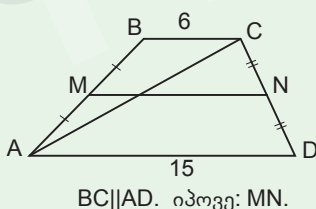
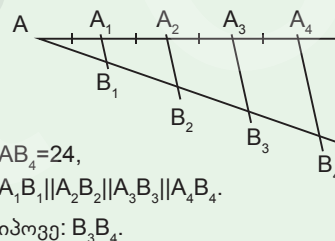
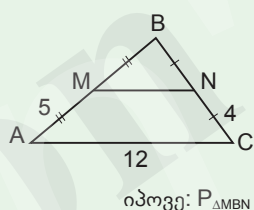
1. რაში მდგომარეობს თაღისის თეორემა?
2. რას ეწოდება სამკუთხედის შუა ხაზი?
3. რა თვისებები აქვს სამკუთხედის შუა ხაზს?

#### სავარჯიშოები

- 1 ნახაზზე  $AB=BC=CD$ .  $BK \parallel CM \parallel DN$ ,  $AK=8$  სმ. იპოვე  $MN$ -ის სიგრძე.



- 2 ამოხსენი ამოცანა ნახაზის მიხედვით:



- 3 ABC სამკუთხედში  $BC=10$  სმ,  $MN$  შუახაზია და  $BC$  გვერდის პარალელურია. გამოთვალე  $MN$  მონაკვეთის სიგრძე.
- 4 სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია: 6სმ, 8სმ და 10სმ. იპოვე სამკუთხედის შუა ხაზებისაგან შედგენილი სამკუთხედის პერიმეტრი.
- 5 რას უდრის სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის შუახაზებისაგან შედგენილი სამკუთხედის პერიმეტრი 12სმ-ია.

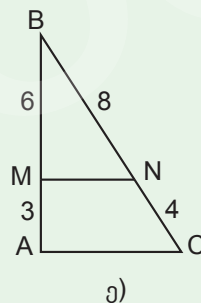
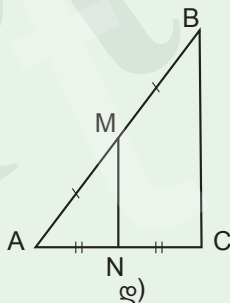
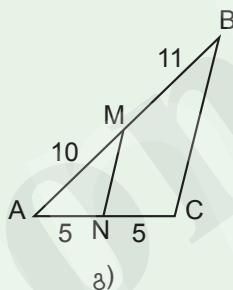
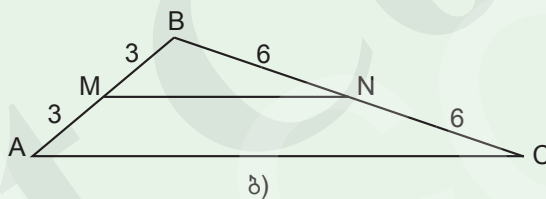
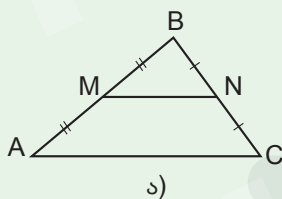
**6** ABC სამკუთხედში გავლებულია AM და BN მედიანები.  $AB=12$  სმ. გამოთვალე MN მონაკვეთის სიგრძე.

**7** სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია: 12 სმ და 16 სმ. მესამე გვერდის შუა წერტილზე გავლებულია ამ ორი გვერდის პარალელური წრფეები. გამოთვალე მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

**8**  $60^\circ$ -იანი კუთხის შიგნით ალებულ წერტილზე კუთხის გვერდების პარალელური წრფეებია გავლებული. დაადგინე, რა სახის ოთხკუთხედი მიიღება ამ წრფეებით კუთხის გვერდების გადაკვეთის შედეგად და გამოთვალე მისი კუთხეების გრადუსული ზომები.

**9** სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია: 10სმ, 12სმ და 14სმ. გამოთვალე იმ ოთხკუთხედის პერიმეტრი, რომელსაც სამკუთხედისაგან  
ა) უღიღესი; ბ) უმცირესი გვერდის პარალელური შუა ხაზი ჩამოკვეთს.

**10** მოცემულ სამკუთხედებს შორის იპოვე სამკუთხედები, რომლებშიც გავლებულია შუა ხაზი:



**11** ABC სამკუთხედში გაავლეს შუა ხაზები:  $KN=14$  სმ,  $NL=15$  სმ,  $KL=18$  სმ. გამოთვალე ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

**12** სამკუთხედის პერიმეტრია 28 სმ. გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მონაკვეთებით. გამოთვალე მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.

**13** M და N წერტილები ABC სამკუთხედის BC და AC გვერდების შუა წერტილებია. იპოვე AB გვერდის სიგრძე, თუ იგი MN მონაკვეთზე 6 სმ-ით გრძელია.

**14** დაამტკიცე, რომ სამკუთხედი შუა ხაზებით ოთხ ტოლ სამკუთხედად იყოფა.

**15** M წერტილი ABC სამკუთხედის BC გვერდის შუა წერტილია, ხოლო K წერტილი AM მონაკვეთს 3:1 შეფარდებით ყოფს (A წვეროს მხრიდან).

- ა) რა შეფარდებით ყოფს BK წრფე AC გვერდს? რა აგებებია დამატებით საჭირო?  
ბ) რა შეფარდებით ყოფს CK წრფე AB გვერდს?

- 16 რა შეფარდებით იყოფა სამკუთხედის მედიანები გადაკვეთის წერტილით?
- 17 M წერტილი ABC სამკუთხედის BC გვერდის შუა წერტილია, ხოლო K წერტილი AB გვერდს 2:1 შეფარდებით ყოფს (A წვეროს მხრიდან). რა შეფარდებით ყოფს CK წრფე AM მონაკვეთს? რა აგებებია დამატებით საჭირო?
- 18 მოცემულია ABC სამკუთხედი.  $A_1$  და  $B_1$  შესაბამისად BC და AC გვერდების შუა წერტილებია, ხოლო O არის  $AA_1$  და  $BB_1$  წრფეების გადაკვეთის წერტილი. რა შეფარდებით ყოფს CO წრფე AB გვერდს?
- 19 მოცემულია ორი პარალელური ქორდა და დიამეტრი, რომელიც ერთ-ერთი ამ ქორდის შუა წერტილზე გადის. დაამტკიცე, რომ ეს დიამეტრი მეორე ქორდის მართობულია.
- 20 დაამტკიცე, რომ ქორდა, რომელიც წრეწირის ორი პარალელური ქორდის შუა წერტილებზე გადის, წრეწირის ცენტრზე გადის.
- 21 8 ცხენის გამოსაკვებად 15 დღის განმავლობაში 1440 კგ თივაა საჭირო. რამდენი დღის განმავლობაში ეყოფა 10 ცხენს 4800 კგ თივა?
- 
- 22 გარკვეულ სამუშაოზე სამი მუშა ერთნაირი ინტენსივობით მუშაობდა. ორმა 3-3 დღე იმუშავა, მესამემ – 4. სამივეს ერთად 320 ლარი გადაუხადეს. ვის რა თანხა ერგება გასამრჯელოდ?

### აბა, სცადე!

1. სამი პარალელური წრფე გადაკვეთე სამი პარალელური წრფით. რამდენი პარალელოგრამი მიიღე?
2. სამი პარალელური წრფე გადაკვეთე ოთხი პარალელური წრფით. რამდენი პარალელოგრამი მიიღე?



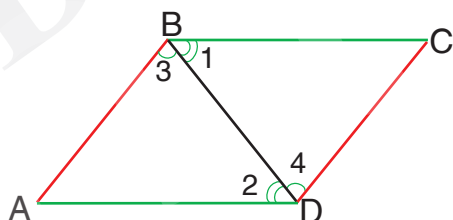
## 2.6 პარალელოგრამის ნიშნები



1. პარალელოგრამის ნიშნების შესწავლა და გამოყენება;
2. სამკუთხედის მედიანის თვისების შესწავლა და გამოყენება;
3. ამოცანების ამოხსნა

2.4 პარაგრაფში გადმოცემული მე-2 თეორემა წარმოადგენს პარალელოგრამის ძირითადი თვისებების ჩამონათვალს. ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, არის თუ არა მოცემული ოთხკუთხედი პარალელოგრამი. თეორემას სამი დებულების სახით ჩამოვაყალიბებთ. თითოეულ მათგანს პარალელოგრამის ნიშანი ეწოდება.

**თეორემა 1.** თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.



მოცემულია:  $ABCD$  ოთხკუთხედი.

$AB=CD$ ,  $BC=AD$ .

უნდა დავამტკიცოთ:

$BC \parallel AD$ ,  $AB \parallel CD$ .

**დამტკიცება:** რადგან  $AB=CD$ ,  $BC=AD$  და  $BD$  საერთო გვერდია, ამიტომ  $\triangle ABD = \triangle CDB$

(სამკუთხედების ტოლობის III ნიშნის თანახმად). ტოლ სამკუთხედებში ტოლი გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ამიტომ  $\angle 1 = \angle 2$ . ეს კუთხეები  $BC$  და  $AD$  წრფეების  $BD$  წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეებია. წრფეთა პარალელურობის ნიშნებიდან გამომდინარე,  $BC \parallel AD$ . ანალოგიურად,  $\angle 3 = \angle 4$  ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $AB \parallel CD$ . მივიღეთ, რომ  $ABCD$  ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

**თეორემა 2.** თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

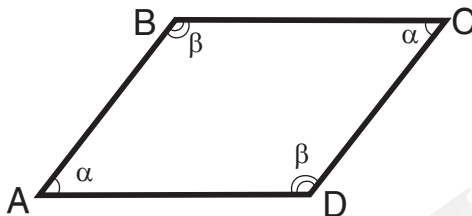
**დამტკიცება:** დავუშვათ,  $A$  და  $B$  კუთხეების სიდიდეებია  $\alpha$  და  $\beta$ , მაშინ  $\angle A = \angle C = \alpha$ ,  $\angle B = \angle D = \beta$ .

ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი  $360^\circ$ -ია, ამიტომ

$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ , ანუ  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . მაშასადამე,  $AD$  და  $BC$

წრფეების  $AB$  წრფით გადაკვეთისას, ასევე  $AB$  და  $CD$  წრფეების  $AD$  წრფით გადაკვეთისას მიღებული

შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი  $180^\circ$ -ია, ამიტომ წრფეთა პარალელურობის ნიშნებიდან გამომდინარე,  $BC \parallel AD$  და  $AB \parallel CD$ . მაშასადამე,  $ABCD$  ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.



**თეორემა 3.** თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

**დამტკიცება:** რადგან  $BO=DO$ ,  $CO=AO$ ,

$\angle BOC = \angle DOA$ , ამიტომ სამკუთხედების ტოლობის პირ-

ველი ნიშნით,  $\triangle BOC = \triangle DOA$ . ტოლ სამკუთხედებში ტო-

ლი გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ამიტომ

$\angle 1 = \angle 2$ . ეს კუთხეები კი  $BC$  და  $AD$  წრფეების  $BD$  წრფით

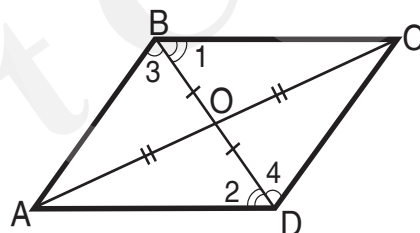
გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეებია.

აქედან გამომდინარე,  $BC \parallel AD$ . ანალოგიურად,  $AOB$

და  $COD$  სამკუთხედების ტოლობიდან ვასკვნით,

რომ  $\angle 3 = \angle 4$ . საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $AB \parallel CD$ . მაშასადამე,  $ABCD$  ოთხკუთხედი

პარალელოგრამია, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

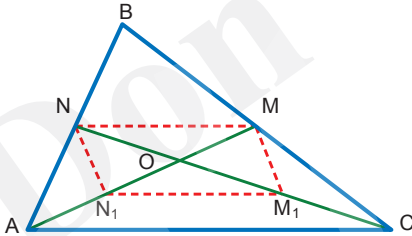


მოვიყვანოთ პარალელოგრამობის კიდევ ერთი ნიშანი, რომელსაც სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის გამოყენებით დამოუკიდებლად ადვილად დამტკიცებ.

**თეორემა 4.** თუ ოთხკუთხედის ორი გვერდი ტოლი და პარალელურია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

**თეორემა 5.** სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება და ამ წერტილით წვეროს მხრიდან 2:1 შეფარდებით იყოფა.

**დამტკიცება:** საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ  $AM$  და  $CN$  მედიანებისათვის სრულდება ტოლობები:  $AO=2MO$ ,  $CO=2NO$ . განვიხილოთ  $NM_1N_1$  ოთხკუთხედი, სადაც  $MN$  —  $\triangle ABC$ -ს, ხოლო  $M_1N_1$  —  $\triangle AOC$ -ს შუა ხაზებია. შუა ხაზის თვისების თანახმად,  $NM_1 \parallel AC$ ,  $N_1M_1 \parallel AC$ , საიდანაც  $NM \parallel N_1M_1$ , ამასთან,  $MN$  და  $N_1M_1$  მონაკვეთები  $AC$  გვერდის ნახევრები, ანუ ტოლი მონაკვეთებია. აქედან მე-4 თეორემის გამოყენებით ვასკვნით, რომ  $N_1NM_1$  ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რომელშიც  $O$  დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, ამიტომ  $OM=ON_1$  ( $ON_1=AN_1$ ),  $NO=OM_1$  ( $OM_1=M_1C$ ). ე.ი.  $AO=2MO$ ,  $CO=2NO$ , რის დამტკიცებაც გვინდოდა.



#### უპასუხე კითხვებს:

- ჩამოაყალიბე პარალელოგრამობის ნიშნები.
- რაში ვიყენებთ პარალელოგრამობის ნიშნებს?
- არის თუ არა პარალელოგრამი ოთხკუთხედი, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდების მხოლოდ ერთი წყვილი აქვს პარალელური?
- არის თუ არა პარალელოგრამი ოთხკუთხედი, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდების მხოლოდ ერთი წყვილი აქვს ტოლი?
- არსებობს თუ არა ოთხკუთხედი, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდები ტოლი აქვს, ხოლო მოპირდაპირე კუთხეები — არატოლი?
- არსებობს თუ არა ოთხკუთხედი, რომელსაც ტოლი გვერდების ორი წყვილი აქვს და პარალელოგრამი არ არის?
- იქნება თუ არა პარალელოგრამი ისეთი ოთხკუთხედი, რომლის ოთხივე გვერდი ტოლია?
- იქნება თუ არა პარალელოგრამი ისეთი ოთხკუთხედი, რომლის ოთხივე კუთხე ტოლია?
- რა თვისება აქვს სამკუთხედის მედიანებს?

#### სავარჯიშოები

1

შეავსე წინადადება:

- თუ ოთხკუთხედის . . . გვერდები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
- თუ ოთხკუთხედის . . . კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
- თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით . . ., მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
- თუ ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი ოთხკუთხედის . . . ცენტრია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.
- თუ ოთხკუთხედის თითოეულ გვერდთან მდებარე . . .  $180^\circ$ -ია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

2

ოთხკუთხედში, რომლის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, ერთი კუთხის სიდიდე  $40^\circ$ -ია. გამოთვალე ოთხკუთხედის დანარჩენი კუთხეები.

3

ოთხკუთხედში, რომლის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ორი გვერდის სიგრძეა 7სმ და 9სმ. გამოთვალე ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

4

ABC სამკუთხედის BD მედიანის გაგრძელებაზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ  $DK=DB$ . გამოთვალე ABCK ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ  $AB=11$  სმ,  $BC=15$  სმ.

5

ABCD ოთხკუთხედში  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ,  $AB=5$ მ. იპოვე CD, თუ  $BC \parallel AD$ .

6

ABCDE ხუთკუთხედში  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB=AE=4,5$  სმ.  $ED \parallel BC$ ,  $ED=BC$ . იპოვე CD მონაკვეთის სიგრძე.

7

ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეებია 12სმ და 18სმ. ამ ოთხკუთხედის წვეროებზე გავლებულია დიაგონალების პარალელური წრფეები. გამოთვალე ამ წრფეებით შედგენილი ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

8

ABC ტოლგვერდა სამკუთხედში, რომლის გვერდის სიგრძეა 6სმ, გვერდების შუა წერტილებია E, F და K. გამოთვალე: ა) AEFK ოთხკუთხედის პერიმეტრი; ბ) KFC სამკუთხედის პერიმეტრი.

9

გამოთვალე AEFD პარალელოგრამის ED დიაგონალი, თუ  $AE=10$  სმ და E წვეროდან AD გვერდზე დაშვებული EK მართობი AED სამკუთხედის მედიანას წარმოადგენს.

10

ABCD ოთხკუთხედში  $AB=CD=8$  სმ,  $AB \parallel CD$ . გამოთვალე ABCD ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ BC გვერდი AB გვერდზე 5სმ-ით მეტია.

11

ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეზე მდებარე წერტილიდან გავლებულია სამკუთხედის ფერდების პარალელური წრფეები. გამოთვალე მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ სამკუთხედის ფერდი 7 დმ-ის ტოლია.

12

ოთხკუთხედის დიაგონალებია 15სმ და 20სმ. გამოთვალე ამ ოთხკუთხედის გვერდების შუა წერტილების თანმიმდევრობითი შეერთებით მიღებული ფიგურის პერიმეტრი.

13

ოთხკუთხედის დიაგონალები, რომელთა სიგრძეები არის 16სმ და 18სმ, ურთიერთმართობულია. გამოთვალე ამ ოთხკუთხედის გვერდების შუა წერტილების თანმიმდევრობითი შეერთებით მიღებული ფიგურის ფართობი.

14

ABC სამკუთხედში  $AB=BC=12$  სმ,  $\angle B=120^\circ$ . AD მედიანა და BK სიმაღლე O წერტილში იკვეთება. გამოთვალე OK მონაკვეთის სიგრძე.

15

MNK ტოლფერდა სამკუთხედში MK ფუძის სიგრძე 20სმ-ია,  $\angle N=90^\circ$ . MD მედიანა და NE სიმაღლე O წერტილში იკვეთება. გამოთვალე OE მონაკვეთის სიგრძე.

- 16** ABC სამკუთხედის AD მედიანაზე აღებულია K შუა წერტილი. გამოთვალე მანძილი K წერტილიდან მედიანების გადაკვეთის წერტილამდე, თუ  $AD=60$  სმ.
- 17** ABCD და AEFD ოთხკუთხედები პარალელოგრამებია. დაამტკიცე, რომ BCFE ოთხკუთხედიც პარალელოგრამია.
- 18** ABCD პარალელოგრამში K არის AD გვერდის შუა წერტილი. BK და AC მონაკვეთები T წერტილში იკვეთება. გამოთვალე TK მონაკვეთის სიგრძე, თუ  $BK=21$  სმ.
- 19** დაამტკიცე, რომ თუ ABCD პარალელოგრამში AD და BC გვერდების შუა წერტილები არის შესაბამისად F და E, მაშინ AC დიაგონალი BF და DE მონაკვეთებთან გადაკვეთის წერტილებით სამ ტოლ მონაკვეთად იყოფა.
- 20** ABCD პარალელოგრამში B კუთხის წვეროდან გავლებულია BM და BN მონაკვეთები, რომლებიც, შესაბამისად AD და DC გვერდებს შუაზე ყოფს. ამ მონაკვეთების AC დიაგონალთან გადაკვეთის წერტილებია K და L. იპოვე KL მონაკვეთის სიგრძე, თუ  $AC=24$  სმ.
- 21** დაამტკიცე, რომ ყოველი ოთხკუთხედი, რომელსაც სიმეტრიის ცენტრი აქვს, პარალელოგრამია.
- 22** მოცემულია ექვსკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები ტოლი და პარალელურია. დაამტკიცე, რომ ექვსკუთხედის მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელი დიაგონალები ერთ წერტილში გადაიკვეთება და ამ წერტილით შუაზე იყოფა.
- 23** გამოთვალე სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ამ სამკუთხედისგან 9 სმ სიგრძის შუახაზით ჩამოჭრილი ოთხკუთხედის პერიმეტრი 48 სმ-ია.
- 24** სამკუთხედის პერიმეტრია 30 სმ. გამოთვალე ამ სამკუთხედისგან 6 სმ სიგრძის შუახაზით ჩამოჭრილი ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

### პრაქტიკული სამუშაო

ფარგლითა და სახაზავით ააგე პარალელოგრამი:

- ორი მეზობელი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით;
- დიაგონალებითა და მათ შორის მდებარე კუთხით;
- ორი მეზობელი გვერდითა და მათი ბოლოების შემაერთებელი დიაგონალით;
- ერთი გვერდითა და ორი დიაგონალით.



### პროექტი: „პარალელოგრამი თარგებში“ (ვადა – 2 თვე)

პროექტის რეალიზებისთვის საჭიროა:

- ლონისძიება – ექსკურსია სახელმწიფო და ხელოვნების მუზეუმებში, სამკერვალოებში;
- საპროექტო თემასთან დაკავშირებული მოდელებისა და ფოტოების შერჩევა;
- თემასთან დაკავშირებული მოდელების თარგების მოძიება;
- გეომეტრიის გამოყენების მაგალითების ამოკრება თარგის ნახაზის მიხედვით.



## 2.7 რომბი. რომბის თვისებები



1. პარალელოგრამის ერთ-ერთი კერძო სახის – რომბისა და მისი თვისებების შესწავლა;
2. ამოცანების ამოხსნა რომბის თვისებების გამოყენებით.

**რომბი ეწოდება ოთხკუთხედს, რომლის ოთხივე გვერდი ტოლია.**

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი რომბი პარალელოგრამიცაა, რადგან, როგორც ვიცით, პარალელოგრამობისთვის ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ტოლობაა საკმარისი. აქედან გამომდინარე, რომბს აქვს ყველა ის თვისება, რაც პარალელოგრამს. კერძოდ:

- ა) რომბის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია;
- ბ) რომბის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა;
- გ) რომბის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი  $180^\circ$ -ის ტოლია.

მაგრამ, რომბს აქვს დამატებითი თვისება, რომელიც მას დანარჩენი პარალელოგრამებისაგან გამოარჩევს.

**თეორემა 1. რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია და კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენენ.**

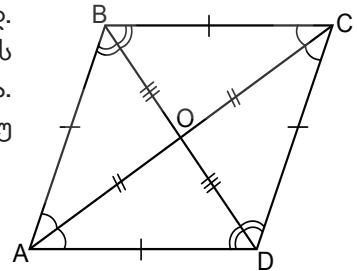
**დამტკიცება:** დიაგონალებით ABCD რომბი ოთხ ტოლ სამკუთხედად დაიყოფა. ეს სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად. ტოლ სამკუთხეოებში ტოლი AB, BC, CD და AD გვერდების მოპირდაპირე  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$  და  $\angle AOD$  კუთხეები ტოლია. მაშასადამე, დიაგონალებით შედგენილი კუთხეები მართია, ანუ რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

ტოლია BO და OD გვერდების, აგრეთვე, AO და OC

გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები:

$$\angle BAO = \angle DAO = \angle BCO = \angle DCO; \angle ABO = \angle CBO = \angle ADO = \angle CDO.$$

რაც ნიშნავს, რომ დიაგონალები რომბის კუთხეების ბისექტრისებია.



### უპასუხე კითხვებს:

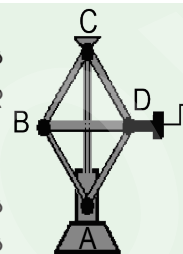
1. არსებობს თუ არა რომბი, რომელიც პარალელოგრამი არ არის?
2. რა თვისებები აქვს რომბის დიაგონალებს?
3. ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. გამომდინარეობს თუ არა აქედან, რომ ეს ოთხკუთხედი რომბია?
4. რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს რომბს?
5. ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან რომელია აუცილებელი და არასაკმარისი, რომელი საკმარისი და არააუცილებელი, რომელი აუცილებელი და საკმარისი, რომელი არ არის არც აუცილებელი და არც საკმარისი იმისათვის, რომ პარალელოგრამი რომბი იყოს?
  - ა) დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან;
  - ბ) დიაგონალები ტოლია;
  - გ) დიაგონალები ურთიერთმართობულია;
  - დ) დიაგონალით იყოფა ორ ტოლგვერდა სამკუთხედად.

## სავარჯიშოები

- 1 გამოთვალე რომბის კუთხეები, თუ რომბის ერთ-ერთი დიაგონალი გვერდთან  $30^\circ$ -იან კუთხეს ადგენს.
- 2 FTKC ოთხკუთხედში, რომლის ყველა გვერდი ტოლია,  $\angle FTK=120^\circ$ . გამოთვალე  $\Delta KEC$ -ს კუთხეები (E დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია).
- 3 გამოთვალე ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მისი ოთხივე გვერდი ტოლია, უმცირესი დიაგონალი 7სმ-ის, ხოლო ბლაგვი კუთხის სიდიდე  $120^\circ$ -ის ტოლია.
- 4 გამოთვალე პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მისი ერთი დიაგონალის სიგრძე არის 7სმ, ხოლო მეორე დიაგონალი პარალელოგრამის 60-გრადუსიან კუთხეს შუაზე ყოფს.
- 5 ABCD პარალელოგრამში AB გვერდის სიგრძე 3,9 სანტიმეტრია და A კუთხის ბისექტრისა პარალელოგრამის C წვეროზე გადის. იპოვე პარალელოგრამის პერიმეტრი.
- 6 ABCD პარალელოგრამში, რომლის AD გვერდი 5 სანტიმეტრია, A და D კუთხეების ბისექტრისები, DC და AB გვერდების გაგრძელებებს E და F წერტილებში კვეთენ. გამოთვალე AFED ოთხკუთხედის პერიმეტრი.
- 7 რომბის ერთ-ერთი დიაგონალი რომბის გვერდის ტოლია. იპოვე რომბის უდიდესი კუთხე.
- 8 დაადგინე ქვემოთ ჩამოთვლილი წინადადებებიდან რომელია ჭეშმარიტი (პასუხი დაასაბუთე):  
 ა) „თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი რომბია“;  
 ბ) „თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები კუთხეთა ბისექტრისებია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი რომბია“ ;  
 გ) „თუ ოთხკუთხედი ღერძულად სიმეტრიულია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი რომბია“;  
 დ) „თუ პარალელოგრამი ღერძულად სიმეტრიულია, მაშინ ის რომბია“;  
 ე) „თუ პარალელოგრამი ცენტრულად სიმეტრიულია, მაშინ ის რომბია“.
- 9 დაამტკიცე, რომ რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი რომბის გვერდებიდან თანაბრად დაშორებული.
- 10 იპოვე რომბის კუთხეები, თუ ბლაგვი კუთხის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე დაშვებული მართობი ამ გვერდს შუაზე ყოფს.
- 11 იპოვე რომბის პერიმეტრი, თუ მისი ბლაგვი კუთხის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე დაშვებული მართობი ამ გვერდს შუაზე ყოფს და მცირე დიაგონალის სიგრძე 5,5 მ-ია.
- 12 იპოვე რომბის პერიმეტრი, თუ ბლაგვი კუთხის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე დაშვებული მართობის სიგრძე 2სმ-ია, ხოლო ბლაგვი კუთხე 5-ჯერ მეტია მახვილ კუთხეზე.

13

ნახაზზე ავტომანქანის ამწეა გამოსახული. მისი სახელურის დატრიალებით AC და BD ღერძების სიგრძეები იცვლება. მიუხედავად ამისა, ისინი ურთიერთმართობულები რჩება. ახსენი, რატომ.

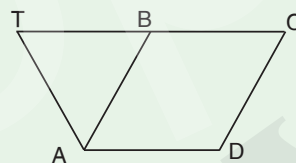


14

საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე რომბის სამი წვეროს კოორდინატებია (1;2), (3;7), (5;2). გამოთვალე მეოთხე წვეროს კოორდინატები.

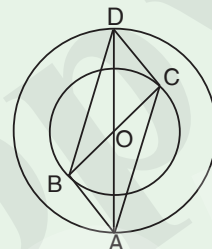
15

ნახაზზე მოცემულია ABCD რომბი, რომლის ერთი დიაგონალი რომბის გვერდის ტოლია. CB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია T წერტილი ისე, რომ  $\triangle ATB$  ტოლფერდაა. იპოვე კუთხე DT და AB წრფეებს შორის.



16

მოცემულია ორი კონცენტრული (საერთო O ცენტრის მქონე) წრეწირი. AD და BC ამ წრეწირების დიამეტრებია. დაამტკიცე, რომ ABDC ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. რა პირობა უნდა მოვითხოვოთ დამატებით, რომ ABDC ოთხკუთხედი რომბი იყოს?



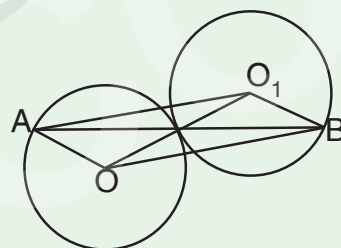
17

ნახაზზე მოცემული ორი წრეწირი, რომელთა ცენტრებია O და  $O_1$ , გარედან ეხება ერთმანეთს. შეხების წერტილი ეკუთვნის AB მონაკვეთს, რომლის ბოლოები წრეწირებზე მდებარეობს.

ა) დაამტკიცე, რომ  $O, A, O_1, B$ .

ბ) დამატებით რა პირობა უნდა მოვითხოვოთ, რომ  $O, A, O_1, B$  პარალელოგრამი იყოს?

გ) შეიძლება თუ არა, რომ  $O, A, O_1, B$  ოთხკუთხედი იყოს რომბი?



18

საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ABCD რომბის A და C წვეროების კოორდინატებია შესაბამისად (-1;2) და (5;2). ამასთან,  $AC=2BD$ . გამოთვალე B და D წვეროების კოორდინატები.

19

ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან რომელია აუცილებელი და არასაკმარისი, რომელი საკმარისი და არააუცილებელი, რომელი აუცილებელი და საკმარისი, რომელი არაა არც აუცილებელი და არც საკმარისი იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი იყოს რომბი?

ა) დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა; ბ) დიაგონალები ტოლია;

გ) დიაგონალით იყოფა ორ ტოლგვერდა სამკუთხედად; დ) დიაგონალებით იყოფა ოთხ ტოლ სამკუთხედად.

## პრაქტიკული სამუშაო

- ქალღალღისაგან გამოჭერი რომბი და გაჭერი დიაგონალებზე; მიღებული ოთხი სამკუთხედისაგან ააწყვე ერთი სამკუთხედი; როგორი სამკუთხედი მიიღე? რატომ?
- გამოჭერი სამკუთხედი და დაყავი ოთხ ისეთ სამკუთხედად, რომელთაგან შეიძლება რომბის აწყობა. როგორი სამკუთხედი გამოდგება ამ დავალების შესასრულებლად?

## 2.8 მართკუთხედი და კვადრატი



1. პარალელოგრამის კერძო სახეების – მართკუთხედისა და კვადრატის თვისებების დადგენა და გამოყენება;

2. ამოცანების ამოხსნა მართკუთხედისა და კვადრატის თვისებების გამოყენებით.

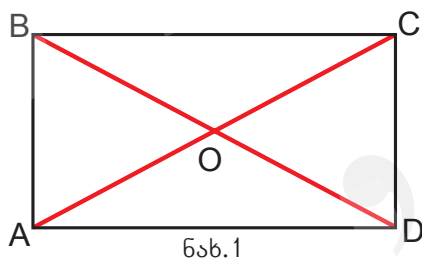
**ოთხკუთხედს, რომლის ყველა კუთხე მართია, მართკუთხედი ეწოდება.**

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მართკუთხედი პარალელოგრამიცაა, რადგან როგორც ვიცით, იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი პარალელოგრამი იყოს, საკმარისია მოპირდაპირე კუთხეების ტოლობა. აქედან გამომდინარე, მართკუთხედს აქვს ყველა ის თვისება, რაც პარალელოგრამს. კერძოდ:

ა) მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია;

ბ) მართკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

მართკუთხედს აქვს დამატებითი თვისება, რომელიც მას დანარჩენი პარალელოგრამებისაგან გამოარჩევს.



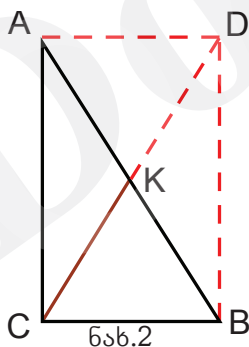
**თეორემა 1. მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.**

**დამტკიცება.** ABCD მართკუთხედში გავავლოთ AC და BD დიაგონალები (ნახ.1).

განვიხილოთ ABD და ADC სამკუთხედები. ამ სამკუთხედებში  $AB=CD$ ,  $AD$  საერთოა,  $\angle BAD=\angle CDA$ . ამიტომ ეს სამკუთხედები ტოლია, საიდანაც ვიღებთ  $AC=BD$  ტოლობას.

1-ლი თეორემიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი შედეგი:

**მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევარია.**



**დამტკიცება.** განვიხილოთ ABC სამკუთხედი, რომელშიც C კუთხე მართია, ხოლო CK არის AB ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა (ნახ. 2). მოცემული სამკუთხედი მართკუთხედამდე შევავსოთ. 1-ლი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ  $CD=AB$ . მეორე მხრივ, K ამ დიაგონალების შუაწერტილია. ამიტომ CK მედიანა CD-ს, ანუ AB-ს ნახევარია.

მართებულია 1-ლი თეორემის შებრუნებული თეორემაც:

**თეორემა 2. თუ პარალელოგრამში დიაგონალები ტოლია, მაშინ ეს პარალელოგრამი მართკუთხედი.**

სცადე ამ თეორემის დამოუკიდებლად დამტკიცება.

**ტოლი გვერდების მქონე მართკუთხედს კვადრატი ეწოდება.**

ცხადია, კვადრატი ერთდროულად რომბიცაა და მართკუთხედიც. ამიტომ მას ამ ორი ფიგურის ყველა თვისება აქვს. კერძოდ, კვადრატის დიაგონალები:

- გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა (პარალელოგრამის თვისება);
- ურთიერთმართობულია (რომბის თვისება);
- კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენს (რომბის თვისება);
- ტოლია (მართკუთხედის თვისება).

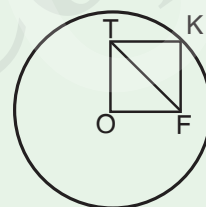


### უპასუხე კითხვებს:

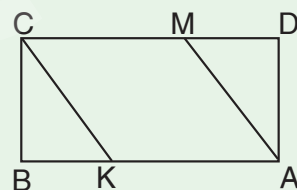
1. რას ეწოდება მართკუთხედი?
2. რა თვისებები აქვს მართკუთხედის მოპირდაპირე გვერდებს?
3. რა თვისებები აქვს მართკუთხედის დიაგონალებს?
4. როგორ ფიგურას ეწოდება კვადრატი?
5. რა შეგიძლია თქვა კვადრატის დიაგონალებზე?
6. რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს მართკუთხედს? კვადრატს?
7. რა თვისება უნდა ჰქონდეს მართკუთხედის დიაგონალებს, რომ ის კვადრატი იყოს?
8. რა თვისება უნდა ჰქონდეს რომბის დიაგონალებს, რომ ის კვადრატი იყოს?
9. რა თვისებები უნდა ჰქონდეს პარალელოგრამის დიაგონალებს, რომ ის კვადრატი იყოს?
10. რა თვისებები უნდა ჰქონდეს ოთხკუთხედის დიაგონალებს, რომ ის კვადრატი იყოს?

### სავარჯიშოები

- 1 მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან მის გვერდებამდე მანძილებია 2სმ და 3სმ. იპოვე მართკუთხედის პერიმეტრი.
- 2 გამოთვალე მართკუთხედის უმცირესი გვერდი, თუ მისი დიაგონალი 7სმ და დიაგონალებს შორის კუთხე –  $60^\circ$ -ია.
- 3 მართკუთხედის დიაგონალები  $70^\circ$ -ის ტოლ კუთხეს ადგენენ. გამოთვალე კუთხეები დიაგონალსა და გვერდებს შორის.
- 4 მართკუთხედის დიაგონალითა და გვერდით შედგენილი კუთხის სიდიდე  $48^\circ$ -ია. გამოთვალე დიაგონალებს შორის ბლაგვი კუთხის სიდიდე.
- 5 მართკუთხე სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 14სმ-ის ტოლია. მისი შუა წერტილიდან კათეტების პარალელური წრფეებია გავლებული. იპოვე მიღებული ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეები.
- 6 ABCD მართკუთხედის გვერდებია 4სმ და 9სმ. B და C კუთხეების ბისექტრისებით AD გვერდი გაყოფილია სამ ნაწილად. იპოვე მათი სიგრძეები.
- 7 ABCD მართკუთხედის გვერდებია 5სმ და 7სმ. A და D კუთხეების ბისექტრისებით BC გვერდი გაყოფილია სამ ნაწილად. იპოვე მათი სიგრძეები.
- 8 OTKF მართკუთხედის O წვერო წრეწირის ცენტრია, ხოლო K წერტილი წრეწირზე ძევს. FT დიაგონალის სიგრძეა 11სმ. იპოვე წრეწირის რადიუსის სიგრძე.
- 9 ABCD მართკუთხედში  $AC=18$ სმ,  $CD=7$ სმ. გამოთვალე COD სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.



- 10 დაამტკიცე, რომ: ა) მართკუთხედის გვერდების შუა წერტილები რომბის წვეროებია; ბ) რომბის გვერდების შუა წერტილები მართკუთხედის წვეროებია.
- 11 მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის მახვილი კუთხის სიდიდე  $60^\circ$ -ია, ჩახაზულია რომბი ისე, რომ ეს კუთხე მათი საერთო კუთხეა. გამოთვალე რომბის გვერდი, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძე 15 დმ-ია.
- 12 კვადრატის დიაგონალი 10სმ-ია. მის წვეროებზე გავლებულია დიაგონალების პარალელური წრფეები. დაადგინე მიღებული ოთხკუთხედის სახე და გამოთვალე მისი პერიმეტრი.
- 13 ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზულია კვადრატი ისე, რომ მისი ორი წვერო ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს, დანარჩენი ორი კი – კათეტებზე. გამოთვალე ჰიპოტენუზისა და კვადრატის გვერდის სიგრძეთა შეფარდება.
- 14 კვადრატის ორი მოპირდაპირე წვეროს კოორდინატებია (2;2) და (5;2). იპოვე დანარჩენი წვეროების კოორდინატები.
- 15 მართკუთხედი დაყოფილია ხუთ ტოლ კვადრატად. გამოთვალე მართკუთხედისა და კვადრატის პერიმეტრების შეფარდება.
- 16 მოცემულია სამი წინადადება:  
 A: „ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია“;  
 B: „ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია“;  
 C: „ოთხკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა“.  
 ამ სამი წინადადებიდან რომელი უნდა იყოს მცდარი, რომ ოთხკუთხედი:  
 ა) იყოს პარალელოგრამი და არ იყოს მართკუთხედი?  
 ბ) იყოს პარალელოგრამი და არ იყოს რომბი?  
 გ) არ იყოს პარალელოგრამი?
- 17 მართკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი მართ კუთხეს ყოფს შეფარდებით 4:5. გამოთვალე ამ პერპენდიკულარიტა და მეორე დიაგონალით შედგენილი კუთხის სიდიდე.
- 18 მართკუთხედის წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი ამ დიაგონალს ყოფს შეფარდებით 1:3. იპოვე დიაგონალის სიგრძე, თუ მართკუთხედის მცირე გვერდის სიგრძეა 5სმ.
- 19 დაამტკიცე, რომ მართკუთხა სამკუთხედში  $30^\circ$ -იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია.
- 20 ABCD მართკუთხედის AB და CD გვერდებზე აღებულია K და M წერტილები ისე, რომ AKCM – რომბია. მართკუთხედის AC დიაგონალის მიერ AB გვერდთან შედგენილი კუთხე  $30^\circ$ -ის ტოლია. იპოვე რომბის გვერდი, თუ მართკუთხედის უდიდესი გვერდის სიგრძე 3სმ-ის ტოლია.



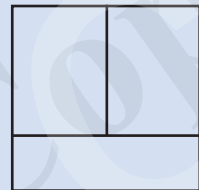
- 21** მართკუთხედი ექვს ტოლ კვადრატადაა დაყოფილი. გამოთვალე მართკუთხედისა და კვადრატის პერიმეტრების შეფარდება (განიხილე ყველა შესაძლო შემთხვევა).
- 22** გამოთვალე: ა)  $\frac{1}{3} \cdot \left[ \left( 2\frac{1}{4} \right)^2 - 7 \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right] - \frac{3}{4}$ ; ბ)  $1\frac{2}{3} \cdot \left[ \left( \frac{3}{5} \right)^3 - \frac{1}{5} \cdot \left( 1\frac{1}{5} \right)^2 \right] + 1\frac{3}{25}$ .
- 23** გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა  $a = -5$ ,  $b = \frac{2}{5}$ .  
 ა)  $a - b(a+b)$ ; ბ)  $(a-b)a+b$ ; გ)  $a-ab-b$ ; დ)  $(a-b)(a+b)$ ; ე)  $a^2b^2-1$ .
- 24** კატერმა 1 სთ-სა 15 წთ-ში 104 კმ გაიარა, სამგზავრო მატარებელმა კი – 1 სთ-სა 30 წთ-ში – 117 კმ. რომლის სიჩქარეა მეტი: კატერის თუ მატარებლის? რამდენჯერ?

### პრაქტიკული სამუშაო (წყვილებში)

- დახაზეთ მართკუთხედი. ფარგლითა და სახაზავით ააგეთ წრეწირი, რომელიც მართკუთხედის ყველა წვეროზე გაივლის.
- დახაზეთ რომბი. ფარგლითა და სახაზავით ააგეთ წრეწირი, რომელიც რომბის ყველა გვერდს შეეხება;  
რა ფიგურისთვის შეიძლება №1 და №2 დავალებების შესრულება?
- ქალაქისაგან გამოჭერით მართკუთხედი და გაჭერით დიაგონალებზე.  
მიღებული ოთხი სამკუთხედისაგან ააწყვეთ:  
ა) პარალელოგრამი, რომელიც არ იქნება მართკუთხედი;  
ბ) ორი რომბი.
- გამოჭერით სამკუთხედი და დაყავით ოთხ ისეთ სამკუთხედად, რომელთაგან შეიძლება კვადრატის აწყობა. როგორი სამკუთხედი გამოდგება ამ დავალების შესასრულებლად?

### აბა, სცადე!

კვადრატი დაყოფილია ტოლი პერიმეტრების მქონე სამ მართკუთხედად. გამოთვალე, რა პროპორციით დაიყო კვადრატის ფართობი.



### შესაძლებელია თუ არა?

დაფაზე დახაზული იყო პარალელოგრამი. მონიშნეს ამ პარალელოგრამის გვერდების შუა წერტილები, პარალელოგრამი კი წაშალეს. შესაძლებელია თუ არა პარალელოგრამის აღდგენა?

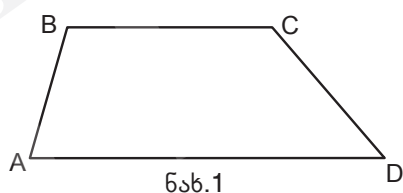
## 2.9 ტრაპეცია. ტრაპეციის თვისებები



1. ტრაპეციის გაცნობა და მისი თვისებების დადგენა;
2. ტრაპეციის თვისებების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.

წინა პარაგრაფებში შევისწავლეთ პარალელოგრამები – ოთხკუთხედები, რომელთაც პარალელური გვერდების ორი წყვილი აქვთ. ამ პარაგრაფში შევისწავლით ოთხკუთხედებს, რომელთაც პარალელური გვერდების მხოლოდ ერთი წყვილი აქვთ.

**ოთხკუთხედს, რომელსაც პარალელური გვერდების მხოლოდ ერთი წყვილი აქვს, ტრაპეცია ეწოდება.**



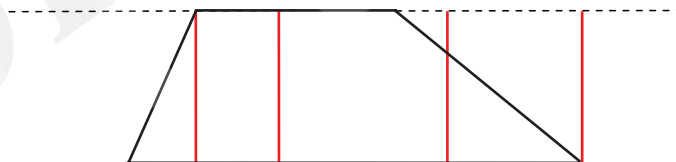
1-ლ ნახაზზე გამოსახულია ოთხკუთხედი, რომელსაც ორი პარალელური და ორი არაპარალელური გვერდი აქვს. ეს ოთხკუთხედი ტრაპეციაა. მის პარალელურ გვერდებს **ფუძეები**, ხოლო არაპარალელურ გვერდებს **ფერდები** ეწოდება. ამ ნახაზზე AD და BC გვერდები ფუძეებია, ხოლო AB და CD – ფერდები.

A და B ისევე, როგორც C და D, შიგა ცალმხრივი კუთხეებია. ამიტომ AD და BC-ს პარალელობიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა:

**თეორემა 1. ტრაპეციის ერთ ფერდთან მდებარე კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ$ -ის ტოლია.**

ტრაპეციის ერთი ფუძის რაიმე წერტილიდან მეორე ფუძის შემცველ წრფეზე დაშვებულ პერპენდიკულარს ტრაპეციის **სიმაღლე** ეწოდება.

მე-2 ნახაზზე გავლებულია რამდენიმე სიმაღლე. ყველა სიმაღლე ტოლი სიგრძისაა (ახსენი, რატომ).

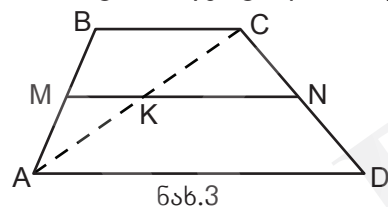


ნახ. 2

ტრაპეციის ფერდების შუა წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს **ტრაპეციის შუა ხაზი** ეწოდება.

**თეორემა 2. ტრაპეციის შუა ხაზი ფუძეების პარალელურია და მისი სიგრძე ფუძეების სიგრძეთა ნახევარჯამის ტოლია.**

**დამტკიცება:** ABCD ტრაპეციის (ნახ.3) AB ფერდის M შუა წერტილიდან გავავლოთ ფუძეების პარალელური MN მონაკვეთი. მაშინ MK მონაკვეთი ABC სამკუთხედის შუა ხაზი იქნება. ამიტომ K წერტილი AC დიაგონალის, ხოლო N წერტილი CD ფერდის, შუა წერტილები აღმოჩნდება. ე. ი. ჩვენ მიერ გავლებული MN მონაკვეთი ტრაპეციის შუა ხაზი, ხოლო მისი MK და KN ნაწილები, შესაბამისად, ABC და ACD სამკუთხედების შუა ხაზებია. ამიტომ, ვწერთ:



ნახ. 3

$$MN = MK + KN = \frac{BC}{2} + \frac{AD}{2} = \frac{BC + AD}{2}.$$





ნახ.4



ნახ.5

მე-4 ნახაზზე მოცემულია ტოლი ფერდების მქონე ტრაპეცია. ასეთ ტრაპეციას **ტოლფერ-** და ტრაპეცია ეწოდება. მე-5 ნახაზზე კი გამოსახულია **მართკუთხა** ტრაპეცია.

**თეორემა 3. ტოლფერდა ტრაპეციაში:**

ა) ერთ ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

ბ) ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე დიდ ფუძეს ყოფს მონაკვეთებად, რომელთაგან ერთის სიგრძე ფუძეების სიგრძეთა ნახევარჯამის, ხოლო მეორის — ფუძეების სიგრძეთა ნახევარსხვაობის ტოლია.

**დამტკიცება.** B და C წვეროებიდან დავუშვათ BK და CE სიმაღლეები (ნახ.6).

მიღებული AKB და DEC სამკუთხედები ტოლია, რადგან მათ ჰიპოტენუზები და თითო კათეტი ტოლი აქვთ. ამიტომ  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle D = \angle C$ .

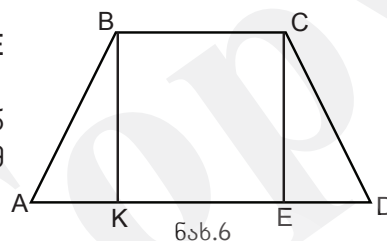
ამასთან,

$$2AK = AK + ED = AD - EK = AD - BC,$$

ანუ

$$AK = \frac{AD - BC}{2},$$

$$\text{ხოლო } KD = AD - AK = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$



#### უპასუხე კითხვებს:

1. რამდენი მართი კუთხე შეიძლება ჰქონდეს ტრაპეციას?
2. შეიძლება თუ არა ტრაპეციის ფუძეები ტოლი იყოს? ფერდები?
3. შეიძლება თუ არა ტრაპეციის დიაგონალი მისი სიმაღლე იყოს?
4. როგორ განმარტავ მართკუთხა ტრაპეციას?
5. რა თვისებები აქვს ტრაპეციის შუა ხაზს?
6. რა თვისებები აქვს ტოლფერდა ტრაპეციას?
7. როგორი სამკუთხედი მიიღება ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდების გაგრძელებით?
8. შეიძლება თუ არა ტრაპეციის შუა ხაზი გადიოდეს დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე?
9. როგორ ტრაპეციას აქვს სიმეტრიის ღერძი?
10. არსებობს თუ არა ცენტრულად სიმეტრიული ტრაპეცია?

#### სავარჯიშოები

1

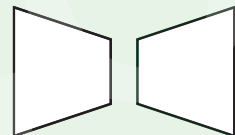
გამოთვალე მართკუთხა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხე, თუ მახვილი კუთხის სიდიდეა  $27^\circ$ .

2

გამოთვალე ტრაპეციის კუთხეები, თუ ერთ ფერდთან მდებარე კუთხეების სიდიდეთა შეფარდებაა 7:11, ხოლო მეორე ფერდთან მდებარე კუთხეების სიდიდეთა შეფარდება — 5:7.

- 3 ტრაპეციის მცირე ფუძის სიგრძე 12სმ-ის, ხოლო ბლაგვი კუთხის წვეროდან ფერდის პარალელურად გავლებული წრფის მიერ ტრაპეციიდან ჩამოჭრილი სამკუთხედის პერიმეტრი 45სმ-ის ტოლია. გამოთვალე ტრაპეციის პერიმეტრი.
- 4 ტრაპეციის პერიმეტრია 60სმ, ხოლო შუა ხაზი – 18სმ. გამოთვალე ტრაპეციის:  
ა) ფუძეების ჯამი; ბ) ფერდების ჯამი.
- 5 ტრაპეციის შუა ხაზის სიგრძე 9 დმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი ფუძის სიგრძე – 12 დმ. გამოთვალე მეორე ფუძის სიგრძე.
- 6 ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია: 7სმ და 11სმ, ხოლო სიმაღლის – 2სმ. გამოთვალე ტრაპეციის კუთხეები.
- 7 ტოლფერდა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე დიდ ფუძეს 3,5სმ და 7,5სმ სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. გამოთვალე ტრაპეციის ფუძეები.
- 8 ტოლფერდა ტრაპეციის მახვილი კუთხის სიდიდეა  $60^\circ$ . ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლე დიდ ფუძეს ყოფს 3,5სმ და 7,5სმ სიგრძის მონაკვეთებად. გამოთვალე ტრაპეციის პერიმეტრი.
- 9 ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 15სმ და 21სმ, ხოლო ფერდების – 14სმ და 17სმ. გამოთვალე ბლაგვი კუთხის წვეროდან ფერდის პარალელურად გავლებული წრფის მიერ ტრაპეციიდან ჩამოჭრილი სამკუთხედის პერიმეტრი.
- 10 ტრაპეციის შუა ხაზი დიაგონალით 13სმ და 15სმ სიგრძის მონაკვეთებად იყოფა. გამოთვალე ტრაპეციის ფუძეები.
- 11 წრფის ერთ მხარეს ალებული A და B წერტილებიდან ამ წრფემდე მანძილებია 7,5სმ და 9,7სმ. გამოთვალე მანძილი AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან ამ წრფემდე.
- 12 წრფის სხვადასხვა მხარეს ალებული A და B წერტილებიდან ამ წრფემდე მანძილებია 5,3სმ და 8,7სმ. გამოთვალე მანძილი AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან წრფემდე.
- 13 ტრაპეციის ფერდი დაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებიდან გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფეები. იპოვე ფერდებს შორის მოთავსებული ამ წრფეების მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ტრაპეციის ფუძეებია 16სმ და 24სმ.
- 14 დაამტკიცე, რომ ტრაპეციის დიაგონალებს შორის მოთავსებული შუა ხაზის მონაკვეთის სიგრძე ფუძეების სიგრძეთა ნახევარსხვაობის ტოლია.
- 15 გამოთვალე ტოლფერდა ტრაპეციის კუთხეები, თუ მისი ერთი ფუძე ორჯერ მეტია მეორე ფუძეზე, ხოლო ფერდი მცირე ფუძის ტოლია.
- 16 ტოლფერდა ტრაპეციის დიდი ფუძის სიგრძე ორჯერ მეტია მცირე ფუძის სიგრძეზე. რას უდრის ტრაპეციის მახვილი კუთხის სიდიდე, თუ დიაგონალი ამ კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს?
- 17 ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდის სიგრძეა 18სმ. შუა ხაზი დიაგონალით 6სმ და 15სმ სიგრძის მონაკვეთებად იყოფა. გამოთვალე ტრაპეციის კუთხეები.

- 18 ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი ბლაგვ კუთხეს შუაზე ყოფს. დიდი ფუძე 50 მ-ით ნაკლებია ტრაპეციის პერიმეტრზე. გამოთვალე ტრაპეციის მცირე ფუძე, თუ ტრაპეციის შუა ხაზი 15 მ-ის ტოლია.
- 19 დაამტკიცე თეორემა: „თუ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ამ ტრაპეციის სიმაღლე შუა ხაზის ტოლია“.
- 20 დაამტკიცე თეორემა: „თუ ტრაპეციის დიაგონალები მახვილი ან ბლაგვი კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენენ, მაშინ ეს ტრაპეცია ტოლფერდაა“. ჩამოაყალიბე შეზღუდული თეორემა და კონტრმაგალითის აგებით დაასაბუთე მისი მცდარობა.
- 21 შეიძლება თუ არა ტრაპეციაში ერთი დიაგონალი მახვილი კუთხის ბისექტრისა იყოს, ხოლო მეორე ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა? პასუხი დაასაბუთე.
- 22 მოცემულია ორი წინადადება:  
 A: „ტრაპეცია ტოლფერდაა“;  
 B: „ტრაპეციის დიაგონალები ტოლია“.  
 ა) დაამტკიცე, რომ ჭეშმარიტია როგორც „თუ A, მაშინ B“, ისე მისი შებრუნებული დებულება: „თუ B, მაშინ A“;  
 ბ) სიტყვების: „აუცილებელია და საკმარისი“ გამოყენებით დამტკიცებული დებულებები ჩამოაყალიბე თეორემის სახით.
- 23 ორ ტოლ ტრაპეციას ისეთი მდებარეობა აქვს, როგორიც ნახაზზეა მოცემული. დაასახელე ორი გარდაქმნა, რომელთაგან თითოეული ერთ ტრაპეციას მეორეში გადასახავს.
- 24 დახაზე სამკუთხედი. მის გარეთ მონიშნე A წერტილი და ააგე სამკუთხედის სიმეტრიული ფიგურა A ცენტრის მიმართ.
- 25 დახაზე მართკუთხა სამკუთხედი. ააგე მოცემული სამკუთხედის სიმეტრიული ფიგურა: ა) მართი კუთხის წვეროს მიმართ; ბ) ჰიპოტენუზის შუა წერტილის მიმართ.
- 26 რა უმცირესი კუთხით უნდა მოვაბრუნოთ ნახაზზე მოცემული ფიგურა მისი სიმეტრიის ცენტრის მიმართ, რომ იგი თავის თავს შეუთავსდეს?
- 27 რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს 26-ე ამოცანაში მოცემულ ფიგურას?
- 28 ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდის მედიანა ფუძესთან  $30^\circ$ -იან კუთხეს ადგენს. გამოთვალე სამკუთხედის კუთხეები.



### პრაქტიკული სამუშაო

გამოჭერი კვადრატი და გაჭერი დიაგონალების გასწვრივ. მიღებული სამკუთხედებისაგან ააწყვე:

- ა) მართკუთხედი, რომლის ერთი გვერდი ორჯერ მეტია მეორეზე;  
 ბ) პარალელოგრამი; გ) სამკუთხედი; დ) ტრაპეცია.

## 2.10 მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი

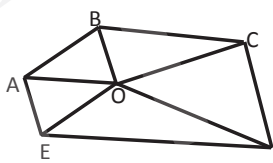


1. ა)  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყვანა;  
ბ) წესიერი  $n$ -კუთხედის კუთხის სიდიდის გამოთვლა;
2.  $n$ -კუთხედის გარე კუთხეების ჯამის გამოთვლა.



პირველ რიგში, გავიხსენოთ ამოზნექილი ფიგურის განმარტება: ამოზნექილი ეწოდება ფიგურას, თუ ყოველ ორ წერტილთან ერთად იგი ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთსაც შეიცავს. ნახაზზე მოცემული ბ) ფიგურა ამოზნექილია, ხოლო ა) ფიგურა არაა ამოზნექილი (ახსენი, რატომ).

გამოვითვალოთ ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი. ამისათვის ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის შიგნით მოვნიშნოთ  $O$  წერტილი და მონაკვეთებით მრავალკუთხედის ყველა



წვეროსთან შევადერთოთ. ამით მრავალკუთხედი  $n$ -ოდეწიების სამკუთხედად დაიყოფა. თითოეული სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი  $180^\circ$ -ია. ყველა ამ სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი არის მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი და ის სრული კუთხე, რომელსაც ამ სამკუთხედების  $O$  წვეროსთან მდებარე კუთხეები ქმნის. მაშასადამე,  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი იქნება  $180^\circ \cdot n - 360^\circ = 180^\circ(n-2)$ . ამით ჩვენ დავამტკიცეთ:

**თეორემა 1.** ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $180^\circ(n-2)$  ტოლია.

ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის გარე კუთხეების ჯამი არაა მისი გვერდების რაოდენობაზე დამოკიდებული. მართლაც, ყოველი გარე კუთხე  $180^\circ$ -ისა და მისი მოსაზღვრე შიგა კუთხის სხვაობის ტოლია. ყველა გარე კუთხის ჯამი იქნება:  $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$ .

მაშასადამე, მართებულია:

**თეორემა 2.** ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედის გარე კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $360^\circ$ -ის ტოლია.

მრავალკუთხედს წესიერი ეწოდება, თუ მისი ყველა კუთხე და ყველა გვერდი ტოლია. მაგალითად, სამკუთხედებში მხოლოდ ტოლგვერდა სამკუთხედი წესიერი, ოთხკუთხედებში – მხოლოდ კვადრატია.

რადგან წესიერი  $n$ -კუთხედის ყველა კუთხე ტოლია და მათი ჯამია  $180^\circ(n-2)$ , თითოეული კუთხის სიდიდე  $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ -ის ტოლია.

**ამოცანა:** გამოვთვალოთ 14 დიაგონალის მქონე ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი.

**ამოხსნა:** პირველ რიგში, უნდა დავადგინოთ  $n$ -ის მნიშვნელობა. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ ამოზნექილი მრავალკუთხედის დიაგონალი არამეზობელი ორი წვეროს შემაერთებელი მონაკვეთია. ამიტომ,  $n$ -კუთხედის თითოეულ წვეროდან  $n-3$  დიაგონალი გაივლება, ხოლო ყველა წვეროზე ერთად –  $\frac{n(n-3)}{2}$  (ახსენი, რატომ). ამოცანის პირობის თანახმად:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 14 \Rightarrow n(n-3) = 28.$$

მიღებული განტოლებიდან, შერჩევის მეთოდით ვღებულობთ, რომ  $n = 7$ . 1-ლი თეორემის თანახმად, შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი იქნება  $900^\circ$ .

**პასუხი:**  $900^\circ$



### უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ფიგურას ეწოდება ამოზნექილი?
2. არის თუ არა სამკუთხედი ამოზნექილი ფიგურა?
3. არსებობს თუ არა არაამოზნექილი ოთხკუთხედი?
4. როგორ გამოითვლი ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამს?
5. ვისარგებლეთ თუ არა 1-ლი თეორემის დამტკიცებაში მრავალკუთხედის ამოზნექილობით?
6. რას უდრის ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის გარე კუთხეების ჯამი?
7. რას ეწოდება წესიერი  $n$ -კუთხედი?
8. როგორ გამოითვლი წესიერი  $n$ -კუთხედის კუთხის სიდიდეს?

### სავარჯიშოები

- 1 მოცემული ფიგურებიდან რომელი არაა ამოზნექილი?



ა)



ბ)



გ)



დ)

- 2 გამოთვალე ამოზნექილი ა) ხუთკუთხედის, ბ) ექვსკუთხედის, გ) რვაკუთხედის, დ) ოთრმეტკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი.

- 3 რამდენი გვერდი აქვს ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამია  $1080^\circ$ ?

- 4 შეიძლება თუ არა, ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი ა)  $450^\circ$ -ის; ბ)  $720^\circ$ -ის ტოლი იყოს?

- 5 რამდენი კუთხე აქვს მრავალკუთხედს, რომლის შიგა კუთხეების ჯამია: ა)  $360^\circ$ ? ბ)  $540^\circ$ ? გ)  $1260^\circ$ ?

- 6 იპოვე ხუთკუთხედის თითოეული კუთხის ზომა, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც: ა)  $6:5:5:8:3$ ; ბ)  $2:3:4:4:5$ .

- 7 იპოვე შვიდკუთხედის თითოეული კუთხის ზომა, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც:  $3:4:4:5:4:5:5$ .

- 8 ექვსკუთხედის ფორმის სკვერის დაგეგმვისას მიიღეს კუთხეების შემდეგი სიდიდეები:  $90^\circ$ ,  $125^\circ$ ,  $125^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $100^\circ$ . დაუშვებს თუ არა შეცდომა კუთხეების გაზომვისას?

- 9 გამოთვალე წესიერი ათკუთხედის თითოეული: ა) შიგა კუთხე; ბ) გარე კუთხე.

- 10** რამდენი გვერდი აქვს ამოზნექილ მრავალკუთხედს, თუ მისი გარე კუთხეების ჯამი  $180^\circ$ -ით ნაკლებია შიგა კუთხეების ჯამზე?
- 11** როგორ შეიცვლება ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი, თუ მისი გვერდების რიცხვს: ა) 1-ით შევამცირებთ? ბ) 1-ით გავზრდით?
- 12** რამდენი გვერდი აქვს მრავალკუთხედს, რომლის თითოეული კუთხის ზომაა  $150^\circ$ ?
- 13** დაამტკიცე, რომ არაამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი  $360^\circ$ -ის ტოლია.
- 14** დაამტკიცე, რომ წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი დიდი დიაგონალის ნახევარია.
- 15** გამოთვალე სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ერთი გვერდის სიგრძეა 14 სმ, ხოლო ამ გვერდის პარალელური შუა ხაზით ჩამოჭრილი ოთხკუთხედის პერიმეტრი – 40 სმ.
- 16** სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:5:6. სამკუთხედის გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი 70 სმ-ია. იპოვე მოცემული სამკუთხედის გვერდების სიგრძე.
- 17** ტოლფერდა ტრაპეციის მცირე ფუძე ფერდის ტოლია, ხოლო დიაგონალი ფერდის მართობულია. გამოთვალე ამ ტრაპეციის კუთხეები.
- 18** ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლე 2-ჯერ ნაკლებია ფერდზე. გამოთვალე ტრაპეციის კუთხეები.
- 19** დაამტკიცე, რომ ტრაპეციის ერთ ფერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთმართობულია.
- 20** დაფაზე დახაზული იყო სამკუთხედი. მონიშნეს ამ სამკუთხედის გვერდების შუა წერტილები, ხოლო სამკუთხედი წაშალეს. როგორ აღადგენენ სამკუთხედს?

### შესაძლებელია თუ არა?

ამოზნექილ მრავალკუთხედს ჰქონდეს: ა) 7 დიაგონალი? ბ) 9 დიაგონალი?

### აბა, სცადე!

ამოზნექილი მრავალკუთხედის სამი წვეროდან გავლებული დიაგონალების რაოდენობაა 16. გამოთვალე მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი.

## მეორე თავის მიმოხილვა

### რა ვისწავლეთ ამ თავში?

- გეომეტრიული გარდაქმნები: ა) სიმეტრია ცენტრის მიმართ; ბ) მობრუნება;
- წრფეთა პარალელობის ნიშნები;
- პარალელოგრამის თვისებები და პარალელოგრამობის ნიშნები;
- თაღის თეორემა;
- რომბის, მართკუთხედისა და კვადრატის თვისებები და ნიშნები;
- ტრაპეციის თვისებები;
- სამკუთხედისა და ტრაპეციის შუა ხაზის თვისებები;
- მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის გამოთვლა.

### უპასუხე კითხვებს:

- როგორ ააგებ წერტილის სიმეტრიულ წერტილს: ა) მოცემული ცენტრის მიმართ? ბ) მოცემული ღერძის მიმართ?
- რა კოორდინატების მქონე წერტილი მიიღება კოორდინატთა სათავის მიმართ  $270^\circ$ -იანი კუთხით  $A(0;1)$  წერტილის მობრუნებით?
- შესაძლებელია თუ არა, რომ ორი გადამკვეთი წრფიდან თითოეული ერთი და იმავე წრფის პარალელური იყოს?
- შესაძლებელია თუ არა, რომ ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურა იყოს: ა) ტრაპეცია? ბ) სამკუთხედი?
- რა საერთო თვისება აქვს ოთხკუთხედების კუთხეებს?
- რა ფიგურების სიმრავლეა რომბებისა და მართკუთხედების სიმრავლეთა თანაკვეთა?
- არსებობს თუ არა ოთხკუთხედი, რომელსაც დიაგონალები ურთიერთმართობული და ტოლი აქვს და არაა კვადრატი?
- არსებობს თუ არა პარალელოგრამი, რომელსაც დიაგონალები ურთიერთმართობული და ტოლი აქვს და არაა კვადრატი?
- რა თვისება აქვს სამკუთხედის მედიანებს?
- რა თვისებები აქვს: ა) სამკუთხედის შუა ხაზს? ბ) ტრაპეციის შუა ხაზს?
- რა კუთხით გადაიკვეთება ტრაპეციის ერთ ფერდთან მდებარე კუთხეთა ბისექტრისები?

## შეურჩიე მარცხენა სვეტში მოცემულ წინადადებას სიტყვა მარჯვენა სვეტიდან

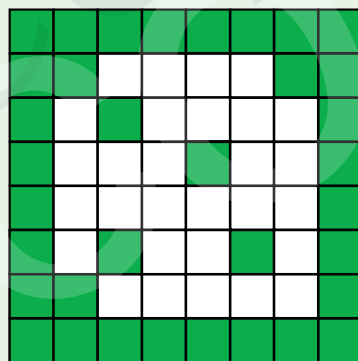
|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურები -----.                                 | ლერძია    |
| პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მისი სიმეტრიის -----. | ტოლია     |
| რომბის დიაგონალი მისი სიმეტრიის ----- .                              | ორი       |
| მართკუთხა ტრაპეციას აქვს ----- მართი კუთხე.                          | ერთადერთი |
| ტრაპეციის შუა ხაზის სიგრძე ფუძეების სიგრძეთა ჯამის -----.            | ნახევარია |
| ტოლფერდა ტრაპეციას აქვს ----- სიმეტრიის ღერძი.                       | ცენტრია   |

## სავარჯიშოები

1

სულ ცოტა, რამდენი უჯრის გაფერადებაა საჭირო იმისათვის, რომ ნახაზზე მოცემული ფიგურა გახდეს.

- ა) ცენტრულად სიმეტრიული?  
ბ) ღერძულად სიმეტრიული?  
გ) ღერძულად და ცენტრულად სიმეტრიული?



2

სამკუთხედში, რომლის პერიმეტრი 90 სმ-ის ტოლია, შუახაზების სიგრძეების შეფარდებაა 2:3:4. გამოთვალე სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

3

ღურგალი მართკუთხედის ფორმის ჩარჩოს დასამზადებლად მხოლოდ სიგრძის საზომ ხელსაწყოს იყენებს. როგორ ახერხებს ღურგალი ამას?

4

რამდენი გვერდი აქვს ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის თითოეული კუთხე ტოლია:  
ა)  $60^\circ$ -ის; ბ)  $108^\circ$ -ის; გ)  $120^\circ$ -ის.

5

მართკუთხედის ფორმის გასაშლელი მაგიდის ზედაპირის ფართობი გაშლის შემდეგ გაიზარდა ერთნახევარჯერ. რამდენი სანტიმეტრით მოიმატა სიგრძეში მაგიდამ, თუ გაშლამდე მისი სიგრძე 1,5მ-ს უდრიდა?

6

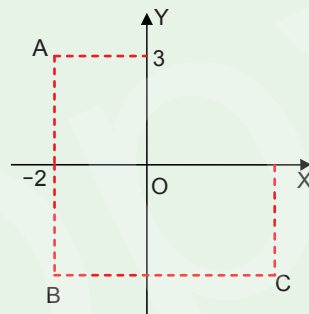
ტოლფერდა ტრაპეციის ერთი კუთხეა  $72^\circ$ . იპოვე დანარჩენი კუთხეები.





7

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A, B და C წერტილები. A წერტილის კოორდინატები ნახაზზეა მითითებული. B წერტილი A-ს სიმეტრიული წერტილია აბსცისათა ღერძის მიმართ, ხოლო BC მონაკვეთი აბსცისათა ღერძის პარალელურია და მისი სიგრძე 7-ის ტოლია. იპოვე C წერტილის კოორდინატთა სათავეს მიმართ სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.

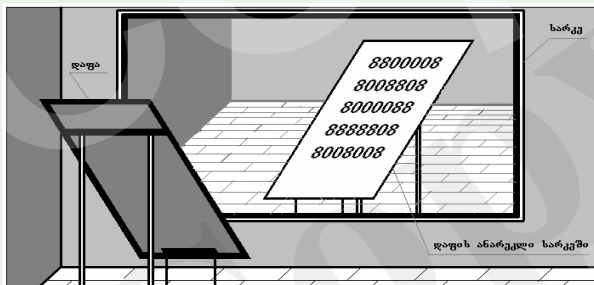


8

იპოვე ამოზნექილი ა) რვაკუთხედის; ბ) ათკუთხედის კუთხეების ჯამი.

9

სურათზე ნაჩვენებია დაფა, სარკე და დაფის ანარეკლი სარკეში. დაფაზე ხუთი რიცხვი წერია. ზემოდან მერამდენე სტრიქონზე წერია უდიდესი რიცხვი?



10

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(2;1) და B(-1;-1) წერტილები. იპოვე იმ C წერტილის კოორდინატები, რომელიც B წერტილის სიმეტრიულია A-ს მიმართ.

11

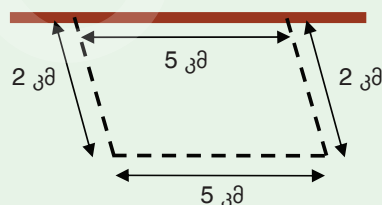
იპოვე ABCD ტრაპეციის A და C კუთხეები, თუ  $\angle B = 130^\circ$  და  $\angle D = 58^\circ$ .

12

იპოვე ABCD პარალელოგრამის კუთხეები, თუ  $\angle B = 102^\circ$ .

13

გზის მონაკვეთის დაზიანების გამო მძღოლმა ნახაზზე წყვეტილით ნაჩვენები სათადარიგო გზით უნდა ისარგებლოს. რამდენი კილომეტრით მეტის გავლა მოუწევს მძღოლს?

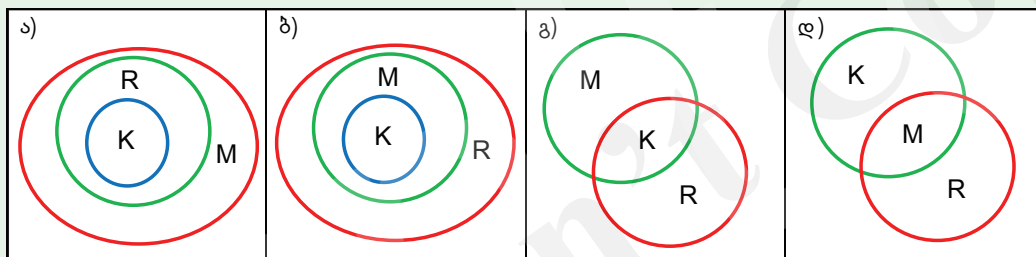


14

პარალელოგრამის ერთი გვერდი მეორეზე 4 სმ-ით მეტია, ხოლო პერიმეტრი 40 სმ-ია. იპოვე პარალელოგრამის გვერდების სიგრძე.

15

ვთქვათ, M-მართკუთხედების, R-რომბების, ხოლო K კვადრატების სიმრავლეა. რომელი დიაგრამა გვიჩვენებს ამ სიმრავლეებს შორის მიმართებას?

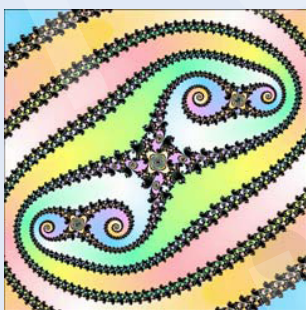


16

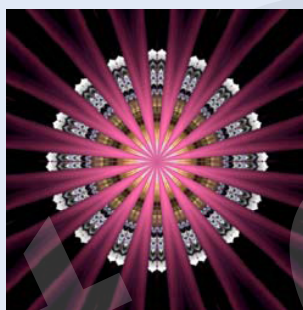
გამოსახე დიაგრამის საშუალებით მიმართება ოთხკუთხედების, პარალელოგრამებისა და ტრაპეციების სიმრავლეებს შორის.

## ტესტი №2

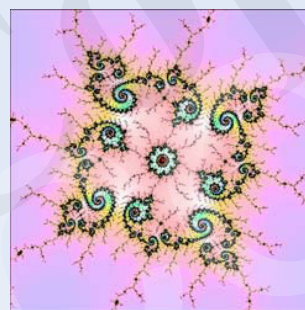
- რა კუთხით მობრუნდება საათის წუთების მაჩვენებელი ისარი  $\frac{1}{3}$  სთ-ში?  
ა)  $20^\circ$ ; ბ)  $60^\circ$ ; გ)  $120^\circ$ ; დ)  $100^\circ$ .
- დროის რომელიღაც მომენტში წუთებისა და საათების მაჩვენებელი ისრები ერთმანეთს ემთხვეოდა. რა კუთხეს შეადგენენ ისრები ერთმანეთთან 12 წუთის შემდეგ?  
ა)  $12^\circ$ ; ბ)  $24^\circ$ ; გ)  $64^\circ$ ; დ)  $66^\circ$ .
- რა დროა საჭირო იმისათვის, რომ საათების მაჩვენებელი ისარი  $4^\circ$ -იანი კუთხით შემობრუნდეს?  
ა) 2 წთ; ბ) 4 წთ; გ) 8 წთ; დ) 12 წთ.
- ნახატზე გამოსახულია ცენტრულად სიმეტრიული სამი ფიგურა. რომელი მათგანია ღერძულად სიმეტრიული?



I



II



III

- ა) I; ბ) II; გ) III; დ) არც ერთი

- ქვემოთ მოცემული ფიგურებიდან რომელია მიღებული ა) ფიგურისაგან საათის ისრის მიმართულებით  $90^\circ$ -იანი კუთხით მობრუნების შედეგად?



ა)



ბ)



გ)



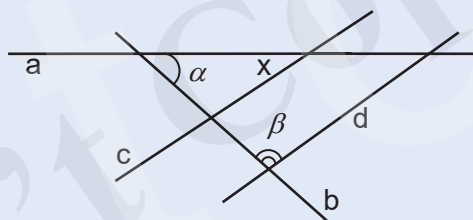
დ)



ე)

- ნახაზზე მოცემული  $a$  და  $b$  გადამკვეთი, ხოლო  $c$  და  $d$  პარალელური წრფეებია. გამოსახე  $x$  კუთხე  $\alpha$  და  $\beta$  კუთხეების საშუალებით.

- ა)  $x = \alpha + \beta$ ; ბ)  $x = 180^\circ - \alpha + \beta$ ;  
გ)  $x = \alpha - \beta$ ; დ)  $x = 180^\circ - \alpha - \beta$ .

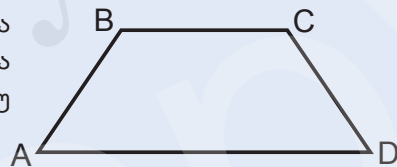


- იპოვე პარალელოგრამის მახვილი კუთხის სიდიდე, თუ ზღაგვი კუთხის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდებზე დაშვებული პერპენდიკულარები ერთმანეთთან  $75^\circ$ -იან კუთხეს ქმნის.

- ა)  $75^\circ$ ; ბ)  $65^\circ$ ; გ)  $25^\circ$ ; დ)  $45^\circ$ .

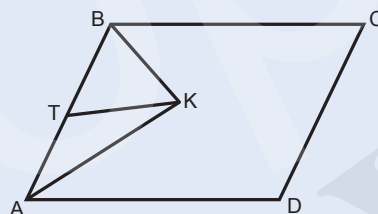
8. ABCD ტრაპეციაში დიდი ფუძე ორჯერ მეტია მცირე ფუძეზე. იპოვე ფერდების გაგრძელებითა და მცირე ფუძით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ  $AB=3$  სმ,  $AD=10$  სმ,  $CD=4$  სმ.

- ა) 9 სმ; ბ) 16 სმ; გ) 12 სმ; დ) 30 სმ.



9. ABCD პარალელოგრამის A და B კუთხეების ბისექტრისები K წერტილში იკვეთება. გამოთვალე მანძილი AB გვერდის T შუა წერტილიდან K წერტილამდე, თუ  $AB=28$  სმ.

- ა) 7 სმ; ბ) 14 სმ; გ) 12 სმ; დ) 52 სმ.



10. კვადრატის ორი მოპირდაპირე წვეროს კოორდინატებია  $(1;2)$  და  $(7;2)$ . იპოვე დანარჩენი წვეროების კოორდინატები.

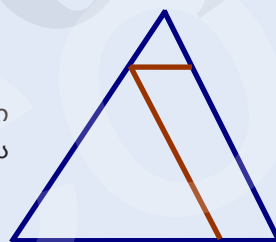
- ა)  $(4;2)$  და  $(4;0)$ ; ბ)  $(4;4)$  და  $(0;4)$ ; გ)  $(4;4)$  და  $(4;0)$ ; დ)  $(4;5)$  და  $(4;-1)$ .

11. მართკუთხედი სამ ტოლ კვადრატადაა დაყოფილი. გამოთვალე მართკუთხედისა და კვადრატის პერიმეტრების შეფარდება.

- ა) 0,5; ბ) 4; გ) 3; დ) 2.

12. ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზულია პარალელოგრამი ისე, რომ მათ ერთი კუთხე საერთო აქვთ. გამოთვალე სამკუთხედის გვერდის სიგრძე, თუ პარალელოგრამის პერიმეტრია 5 დმ.

- ა) 2,5 დმ; ბ) 10 დმ; გ) 5 დმ; დ) 7,5 დმ.



13. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეზე აღებული წერტილიდან გავლებულია ფერდების პარალელური მონაკვეთები ფერდებთან გადაკვეთამდე. იპოვე მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი, თუ ფერდის სიგრძეა 11 დმ.

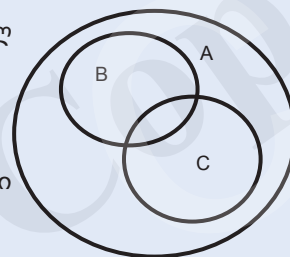
- ა) 25 დმ; ბ) 11 დმ; გ) 15 დმ; დ) 22 დმ.

14. რა სიგრძის იქნება რომბის გვერდი, თუ მისი პერიმეტრი 64 სმ-ის ტოლია?

- ა) 8 სმ; ბ) 16 სმ; გ) 18 სმ; დ) 32 სმ.

15. რა სიმრავლეები შეიძლება იყოს გამოსახული მოცემულ ნახაზზე?

- ა) A პარალელოგრამები, B რომბები, C მართკუთხედები;  
ბ) A ცხოველები, B ლომები, C ვეფხვები;  
გ) A წილადი რიცხვები, B მთელი რიცხვები, C ნატურალური რიცხვები;  
დ) A ოთხკუთხედები, B მართკუთხედები, C კვადრატები.



16. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელ ოთხკუთხედს არა აქვს მოპირდაპირე კუთხეები ტოლი?

- ა) პარალელოგრამს; ბ) ტრაპეციას; გ) რომბს; დ) კვადრატს.

17. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი ოთხკუთხედის დიაგონალები არ იყოფა გადაკვეთის წერტილით შუაზე?

- ა) პარალელოგრამის; ბ) ტრაპეციის; გ) მართკუთხედის; დ) კვადრატის.

18. ნებისმიერი მართკუთხედი არის:

- ა) პარალელოგრამი; ბ) რომბი; გ) კვადრატი; დ) ტრაპეცია.

19. რას უდრის ამოზნექილი  $n$ -კუთხედის შიგა კუთხეების სიდიდეთა ჯამი?

- ა)  $360^\circ$ ; ბ)  $\frac{180^\circ(n-2)}{2}$ ; გ)  $360^\circ n$ ; დ)  $180^\circ(n-2)$ .

20. ტოლფერდა ტრაპეციის ერთი კუთხის სიდიდეა  $78^\circ$ . რას უდრის ტრაპეციის უდიდესი კუთხის სიდიდე?

- ა)  $102^\circ$ ; ბ)  $73^\circ$ ; გ)  $107^\circ$ ; დ)  $117^\circ$ .

21. მართკუთხა ტრაპეციის ერთი კუთხე  $100^\circ$ -ის ტოლია. რას უდრის ტრაპეციის უმცირესი კუთხე?

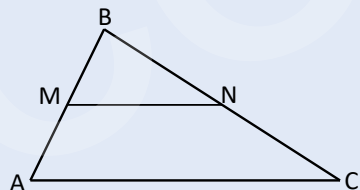
- ა)  $12^\circ$ ; ბ)  $51^\circ$ ; გ)  $80^\circ$ ; დ)  $102^\circ$ .

22. ABCD რომში E დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. CDE სამკუთხედის ერთი კუთხე  $65^\circ$ -ის ტოლია. იპოვე რომბის უმცირესი კუთხის სიდიდე.

- ა)  $130^\circ$ ; ბ)  $25^\circ$ ; გ)  $50^\circ$ ; დ)  $65^\circ$ .

23. ABC სამკუთხედში გავლებულია MN შუა ხაზი.  $AC=14$  სმ,  $AM=4$  სმ და  $BN=6$  სმ. რას უდრის MBN სამკუთხედის პერიმეტრი?

- ა) 10 სმ; ბ) 14 სმ; გ) 17 სმ; დ) 18 სმ.



24. ABC სამკუთხედში გავლებულია MN შუა ხაზი.  $AC=16$  სმ,  $BM=6$  სმ და  $BN=7$  სმ. რას უდრის AMNC ოთხკუთხედის პერიმეტრი?

- ა) 37 სმ; ბ) 22 სმ; გ) 9 სმ; დ) 32 სმ.

25. ტოლფერდა ტრაპეციის შუა ხაზი ფერდის ტოლია. ფერდის სიგრძეა 6 სმ. რას უდრის ტრაპეციის პერიმეტრი?

- ა) 16 სმ; ბ) 24 სმ; გ) 22 სმ; დ) 34 სმ.



## თავი 3. ალგებრული წილადი

### ამ თავში ისწავლი:

- ❖ ალგებრული წილადის ცნებას;
- ❖ ალგებრულ წილადში მონაწილე ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობების განსაზღვრებას;
- ❖ ალგებრული წილადის ნულთან ტოლობის პირობებს;
- ❖ ალგებრული წილადის შეკვეცას;
- ❖ ალგებრული წილადების გაერთმნიშვნე-ლიანებას;
- ❖ ალგებრული წილადების შეკრება-გამოკლებას;
- ❖ ალგებრული წილადების გამრავლება-გაყოფას;
- ❖ ასოითი გამოსახულებების გამარტივების მეთოდებს.

### თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- ❖ ალგებრული წილადის ამოცნობას;
- ❖ ალგებრულ წილადში მონაწილე ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობების დადგენას;
- ❖ ალგებრული წილადის შეკვეცას;
- ❖ ალგებრული წილადების გაერთმნიშვნელობას;
- ❖ მოქმედებებს ალგებრულ წილადებ-ზე (შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას, გაყოფას, ახარისხებას);
- ❖ ასოითი გამოსახულებების გამარტივებას;
- ❖ ალგებრული გამოსახულების გამოყენებას პრაქტიკული ამოცანების მოდელის შესაქმნელად.

### აბა, სცადე!

მორბენალმა დისტანციის  $S_1$  მ სიგრძის მონაკვეთი  $V_1$  მ/წმ სიჩქარით, ხოლო  $S_2$  მ სიგრძის მონაკვეთი  $V_2$  მ/წმ სიჩქარით გაირბინა. რა საშუალო სიჩქარე ჰქონდა მორბენალს მთელ დისტანციაზე?



### იმანუელ კანტი

გერმანელი ფილოსოფოსი  
1724–1804 წწ.

„ყოველ მეცნიერებაში იმდენია მეცნიერული, რამდენიც მათემატიკაა მასში.“



### პროექტი

#### „ამოცანის ამოხსნის ალგებრული მეთოდი“

- ჩამოაყალიბე, რაში მდგომარეობს ამოცანის ამოხსნის ალგებრული მეთოდი:
  - რა ეტაპებისაგან შედგება ამოცანის ამოხსნის ალგებრული მეთოდი;
  - რას ნიშნავს ამოცანის შესაბამისი სიტყვიერი მოდელი;
  - როგორ იქმნება ამოცანის შესაბამისი ალგებრული მოდელი.
- მოიყვანე მაგალითები:
  - მოიძიე და შეადგინე პრაქტიკული ამოცანები (მოძრაობაზე, მუშაობაზე, ყიდვა-გაყიდვაზე, გეომეტრიული ამოცანები და სხვა), რომელთა ამოსახსნელად ალგებრული მეთოდი გამოიყენება;
  - შეადგინე მოძიებული ამოცანების ალგებრული მოდელები (განტოლებები, უტოლობები, გრაფიკები);
  - ამოცანებს დაურთე შესაბამისი თვალსაჩინოებები (ფოტოები, სქემები, ნახაზები).
- მოამზადე ნაშრომი საპრეზენტაციოდ.

## 3.4 მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე



1. ალგებრული წილადების შეკრება-გამოკლება;
2. ალგებრული წილადების გამრავლება-გაყოფა;
3. ცვლადიანი გამოსახულების გამარტივება.

**ამოცანა 1.** ავზი წყლით ერთი მილით  $a$  საათში ივსება, მეორე მილით კი  $-b$  საათში. რამდენ საათში აივსება ავზი ორივე მილის ერთდროული მუშაობით?

**ამოხსნა:**

**I. სიტყვიერი მოდელი:**

|                                             |   |                                               |   |                                             |
|---------------------------------------------|---|-----------------------------------------------|---|---------------------------------------------|
| 1 საათში ორივე მილით შევსებული ავზის ნაწილი | = | 1 საათში პირველი მილით შევსებული ავზის ნაწილი | + | 1 საათში მეორე მილით შევსებული ავზის ნაწილი |
|---------------------------------------------|---|-----------------------------------------------|---|---------------------------------------------|

**II. უცნობის შემოტანა და მონაცემებთან დაკავშირება:**

დავუშვათ, ორივე მილით ავზი  $x$  საათში ივსება, მაშინ ორივე მილით ერთ საათში ავზის  $\frac{1}{x}$  ნაწილი აივსება. ერთ საათში პირველი მილი ავზის  $\frac{1}{a}$  ნაწილს შეავსებს, მეორე მილი  $-\frac{1}{b}$  ნაწილს, ორივე მილი ერთად  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$  ნაწილს.

**III. განტოლების შედგენა:**  $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

**IV. განტოლების ამოხსნა:**

შევასრულოთ შეკრება განტოლების მარჯვენა მხარეს:

$$\frac{1}{x} = \frac{a+b}{ab};$$

ამ ტოლობიდან პროპორციის უცნობი წევრის გამოთვლით მივიღებთ:

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

**პასუხი:** ორივე მილის ერთდროული მუშაობით ავზი  $\frac{ab}{a+b}$  საათში აივსება.

ამ ამოცანაში მიღებული განტოლების ამოსახსნელად დაგვჭირდა ალგებრული წილადების შეკრება, რაც მათი **გაერთმნიშვნელობით** შესრულდა.

განვიხილოთ მაგალითები:

**მაგალითი 1.** შევასრულოთ მოქმედებები:

ა)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ ;    ბ)  $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{ab}$ ;    გ)  $\frac{m^2}{m+2n} - \frac{n}{m+2n}$ ;

დ)  $\frac{1}{4a+b} - \frac{2}{4a-b}$ ;    ე)  $\frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-4} - \frac{3}{x^2+x-2}$ .

**ამოხსნა:**

ა)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ ;

ბ)  $\frac{1}{a^2b}$ ,  $\frac{1}{ab^2}$  და  $\frac{1}{ab}$  წილადების საერთო მნიშვნელია  $a^2b^2$ . შესაბამისად,

$$\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{ab} = \frac{b + a + ab}{a^2b^2};$$

ა)  $\frac{m^2}{m+2n} - \frac{n}{m+2n} = \frac{m^2-n}{m+2n};$

დ)  $\frac{1}{4a+b}$  და  $\frac{1}{4a-b}$  წილადების საერთო მნიშვნელია  $(4a+b)(4a-b)$ . შესაბამისად,

$$\frac{1}{4a+b} - \frac{1}{4a-b} = \frac{(4a-b) - (4a+b)}{(4a+b)(4a-b)} = \frac{4a-b-4a-b}{(4a+b)(4a-b)} = \frac{-2b}{(4a)^2 - b^2} = \frac{-2b}{16a^2 - b^2};$$

ე)  $\frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-4} - \frac{3}{x^2+x-2}$

**I ეტაპი.** მამრავლებად დავშალოთ თითოეული მრავალწევრი, რომელიც წილადების მნიშვნელშია:

$$x^2-x=x(x-1)$$

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

$$x^2+x-2=x^2-x+2x-2=x(x-1)+2(x-1)=(x-1)(x+2);$$

მოცემული გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x^2-4} - \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{(x-1)(x+2)};$$

**II ეტაპი.** წილადების საერთო მნიშვნელად ავიღოთ მრავალწევრი:

$$x(x-1)(x-2)(x+2);$$

**III ეტაპი:** წილადებისთვის დამატებითი მამრავლები იქნება შესაბამისად:

$$(x-2)(x+2), x(x-1) \text{ და } x(x-2);$$

**IV ეტაპი.** თითოეული წილადის მრიცხველი გავამრავლოთ მის დამატებით მამრავლებზე:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} &= \frac{1 \cdot (x^2-4) + 3x(x-1) - 3x(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+2)} = \\ &= \frac{x^2-4+3x(x-1-x+2)}{x(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+3x-4}{x(x-1)(x-2)(x+2)}; \end{aligned}$$

**V ეტაპი.** გავამარტივოთ მიღებული წილადი.

წილადის მრიცხველში მიღებული მრავალწევრი დავშალოთ მამრავლებად:

$$x^2+3x-4=x^2-x+4x-4=x(x-1)+4(x-1)=(x-1)(x+4);$$

მაშინ გვქვია:

$$\frac{x^2+3x-4}{x(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{(x-1)(x+4)}{x(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{x^3-4x}.$$

პასუხი: ა)  $\frac{a+c}{b}$ ; ბ)  $\frac{b+a+ab}{a^2b^2}$ ; გ)  $\frac{m^2-n}{m+2n}$ ; დ)  $-\frac{2b}{16a^2-b^2}$ ; ე)  $\frac{x+4}{x^3-4x}$ .

ალგებრულ წილადებზე შეკრება-გამოკლების გარდა ხშირად გამრავლება-გაყოფისა და ახარისხების მოქმედებათა შესრულება დაგვჭირდება. მოქმედებათა თანმიმდევრობა ისეთივეა, როგორიც რიცხვითი გამოსახულებების შემთხვევაში.

**მაგალითი 2.** გავამარტივოთ:

ა)  $\left(\frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab}\right) \cdot \frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$ ; ბ)  $\frac{x^5-xy^4}{x^2-2ax+a^2} \cdot \frac{x-a}{x^3+xy^2} - \frac{x^2-y^2}{x-a}$ .

**ამოხსნა:** ა) ჯერ შევასრულოთ ფრჩხილებში მითითებული მოქმედება, შემდეგ გამრავლება:

$$1) \frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab} = \frac{b}{a(a-b)} + \frac{a}{-b(a-b)} = \frac{b}{a(a-b)} - \frac{a}{b(a-b)} = \frac{b^2-a^2}{ab(a-b)} = \frac{-(a^2-b^2)}{ab(a-b)};$$

$$2) \frac{-(a^2-b^2)}{ab(a-b)} \cdot \frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2} = \frac{ab(a+b)}{ab(b-a)} = \frac{b+a}{b-a}.$$

ბ) პირველ რიგში, შევასრულოთ გამრავლება, შემდეგ გამოკლება:

$$\frac{x^5-xy^4}{x^2-2ax+a^2} \cdot \frac{x-a}{x^3+xy^2} - \frac{x^2-y^2}{x-a} = \frac{x(x^4-y^4)}{(x-a)^2} \cdot \frac{x-a}{x(x^2+y^2)} - \frac{x^2-y^2}{x-a} = \frac{(x^4-y^4)-(x^4-y^4)}{(x-a)(x^2+y^2)} = 0.$$

**მაგალითი 3.** გავამარტივოთ გამოსახულება:

ა)  $\frac{2x^2}{x^2-a^2} + \frac{a}{x+a} + \frac{x}{a-x}$ ; ბ)  $\frac{c^3+2c^2-c-2}{c^3+2c^2+c+2} \cdot \frac{c^3-3c^2+c-3}{c^3-3c^2-c+3}$ .

**ამოხსნა:** ა) სამი წილადისათვის უმცირესი საერთო მნიშვნელია  $x^2-a^2$ . მივიყვანოთ წილადები საერთო მნიშვნელამდე.

$$\frac{2x^2}{x^2-a^2} + \frac{a}{x+a} + \frac{x}{a-x} = \frac{2x^2}{x^2-a^2} + \frac{a}{x+a} - \frac{x}{x-a} =$$

$$= \frac{2x^2}{x^2-a^2} + \frac{a(x-a)}{x^2-a^2} - \frac{x(x+a)}{x^2-a^2} = \frac{2x^2+ax-a^2-x^2-ax}{x^2-a^2} = 1.$$

$\frac{2x^2}{x^2-a^2} + \frac{a}{x+a} + \frac{x}{a-x}$  გამოსახულება 1-ის ტოლია  $x$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, გარდა  $x = \pm a$ .

გამოსახულების გასამარტივებლად წილადების გაერთმნიშვნელობა დაგვჭირდა. ამისთვის კი წილადების მნიშვნელები, თუკი ეს შესაძლებელია, მამრავლებად უნდა დავშალოთ და ისე მოვნახოთ საერთო მნიშვნელი. თუ რომელიმე მნიშვნელი მამრავლებად არ იშლება, მაშინ მას ერთ თანამამრავლად ავიღებთ.

ბ)  $\frac{c^3+2c^2-c-2}{c^3+2c^2+c+2} \cdot \frac{c^3-3c^2+c-3}{c^3-3c^2-c+3} =$

$$= \frac{c^2(c+2)-(c+2)}{c^2(c+2)+(c+2)} \cdot \frac{c^2(c-3)+(c-3)}{c^2(c-3)-(c-3)} = \frac{(c+2)(c^2-1)}{(c+2)(c^2+1)} \cdot \frac{(c-3)(c^2+1)}{(c-3)(c^2-1)} = 1.$$



**უპასუხე კითხვებს:**

- როგორ შევკრიბოთ ერთნაირმნიშვნელიანი ალგებრული წილადები?
- როგორ შევკრიბოთ სხვადასხვამნიშვნელიანი ალგებრული წილადები?
- რა თანმიმდევრობით ვასრულებთ მოქმედებებს ალგებრული გამოსახულების გამარტივებისას?
- 1-ლი ამოცანის პირობებში რამდენ საათში აივსება ნახევარი ავზი ორივე მილის ერთდროული მუშაობით?
- 1-ლი ამოცანის პირობებში რამდენ საათში აივსება სამი ავზი ორივე მილის ერთდროული მუშაობით?
- ავზის რა ნაწილი აივსება ორივე მილის ერთდროული მუშაობით 2 საათის განმავლობაში?

**სავარჯიშოები**

**შეასრულე მოქმედება № 1–18**

**1**

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \frac{ab}{c+b} + \frac{ac}{c+b}; & \text{ბ) } \frac{b}{1+b} + \frac{1}{1+b}; & \text{გ) } \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^2}; \\ \text{დ) } \frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b}; & \text{ე) } \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}; & \text{ვ) } \frac{a}{a^2-16} - \frac{4}{a^2-16}. \end{array}$$

**2**

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \frac{7a}{a^2-b^2} - \frac{7b}{a^2-b^2}; & \text{ბ) } \frac{a^2+b^2}{a-b} - \frac{2ab}{a-b}; & \text{გ) } \frac{3b+2a}{a+b} + \frac{2b+3a}{a+b}; \\ \text{დ) } \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}; & \text{ე) } \frac{a^2+a}{a^2-9} - \frac{7a-9}{a^2-9}; & \text{ვ) } \frac{m+n}{n-5} - \frac{m+5}{n-5}. \end{array}$$

**3**

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } \frac{1}{a} + \frac{3}{2a} & \text{ბ) } \frac{a}{b} + \frac{b}{2}; & \text{გ) } \frac{a}{3b^2} + \frac{k}{3b}; & \text{დ) } \frac{am}{2k} + \frac{an}{4k^2}; \\ \text{ე) } \frac{2x-3y}{a^2} - \frac{2x+y}{a}; & \text{ვ) } \frac{1}{a} + 3; & \text{ზ) } \frac{b}{c} + 1; & \text{თ) } 4 - \frac{7}{n}; \\ \text{ი) } a - \frac{a}{b}; & \text{კ) } 2a + b + \frac{a^2}{b}. \end{array}$$

**4**

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } 1 - \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2}; & \text{ბ) } \frac{12m}{m-n} - 12; & \text{გ) } 5x - \frac{10x^2-4}{2x}; \\ \text{დ) } \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + 3; & \text{ე) } \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c} - 4; & \text{ვ) } \frac{2}{k} + 3 + \frac{5}{k^2}; \\ \text{ზ) } \frac{7}{a} - \frac{6}{a^2} - 12; & \text{თ) } \frac{21}{a} + \frac{12}{b} - 4a; & \text{ი) } \frac{5ab}{cd} + \frac{3cd}{ab} - 4. \end{array}$$

**5**

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \frac{b}{6a^2} + \frac{c}{9ab}; & \text{ბ) } \frac{a}{4c^2b} + \frac{b}{6c}; & \text{გ) } \frac{2a}{3cb^2} + \frac{5k}{3c^2b}; \\ \text{დ) } \frac{2b}{25a^2c} + \frac{c}{15ab} + \frac{a}{15cb^2}; & \text{ე) } \frac{1}{4c^2b} + \frac{5}{18b^3c}; & \text{ვ) } \frac{2}{3b^2} + \frac{3k}{4c^2} + \frac{4}{5k}. \end{array}$$

**6**

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \frac{15}{2(a+b)} - \frac{6}{a+b}; & \text{ბ) } \frac{2x}{2(x-y)} - \frac{6}{x-y}; & \text{გ) } \frac{2a}{3(a-b)} - \frac{4b}{a-b}; \\ \text{დ) } \frac{3a}{2(a+b)} - \frac{4a}{3(a+b)}; & \text{ე) } \frac{3x}{12(x+y)} + \frac{2y}{x+y}; & \text{ვ) } \frac{b}{30(a-b)} + \frac{a}{18(a-b)}; \\ \text{ზ) } \frac{15}{a^2+a} - \frac{6}{ab+b}; & \text{თ) } \frac{2}{xy-y} - \frac{6}{x^2-x}; & \text{ი) } \frac{6a}{3a-3b} - \frac{4b}{6a-6b}. \end{array}$$

7

$$a) \frac{2}{a} + \frac{2}{a+1}; \quad b) \frac{6}{m} + \frac{3m-5}{m+1}; \quad c) \frac{n+m}{m} - \frac{n-a}{n+m};$$

$$d) \frac{a}{b-a} - \frac{a}{b}; \quad e) \frac{a}{a+b} - \frac{1}{a-b}; \quad f) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}.$$

8

$$a) \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}; \quad b) \frac{4n}{3(n-1)} - \frac{n}{7(n-1)}; \quad c) \frac{a}{5(a-1)} - \frac{a}{7(a-1)};$$

$$d) \frac{a}{1-a^2} - \frac{a}{1+a}; \quad e) \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a-b}; \quad f) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a^2-b^2}.$$

9

$$a) \frac{a}{3} \cdot \frac{5}{b}; \quad b) \frac{x}{2a} \cdot \frac{11}{15}; \quad c) \frac{7m}{n} \cdot \frac{3m}{14}; \quad d) \frac{3k}{c} \cdot \frac{k}{5c}; \quad e) \frac{2am}{5xy} \cdot \frac{3m}{7y};$$

$$f) \frac{23d}{5c} \cdot \frac{n}{y}; \quad g) \frac{a}{3} \cdot \frac{5}{b}; \quad h) \frac{x}{2a} \cdot \frac{11}{15}; \quad i) \frac{7m}{n} \cdot \frac{3m}{14}; \quad j) \frac{3k}{c} \cdot \frac{k}{5c};$$

$$k) \frac{2am}{5xy} \cdot \frac{3m}{7y}; \quad l) \frac{23d}{5c} \cdot \frac{n}{y}; \quad m) \frac{12a}{5} \cdot \frac{7}{4b}; \quad n) \frac{3m}{2n} \cdot \frac{n}{15}; \quad o) \frac{bc}{a} \cdot \frac{4}{3c^3};$$

$$p) \frac{a}{bc} \cdot \frac{b}{ac}; \quad q) \frac{12a}{7} \cdot \frac{7a}{4b}; \quad r) \frac{2a^4}{5c} \cdot \frac{c^3}{a^3}; \quad s) \frac{a^2b^4}{6xy} \cdot \frac{3x^3}{a^2b^2}.$$

10

$$a) \frac{3n}{2n} \cdot \frac{6n^2}{5}; \quad b) \frac{bc^2}{ax} \cdot \frac{b^2cx}{3a}; \quad c) \frac{xy}{bc} \cdot \frac{2y}{ac}; \quad d) \frac{a^2by}{x} \cdot \frac{3x^3y^3}{m^2b^2};$$

$$e) n \cdot \frac{2}{m}; \quad f) 2x \cdot \frac{x}{4n}; \quad g) \frac{2}{m} \cdot 3m; \quad h) \frac{x}{4n} \cdot 8n^2;$$

$$i) \frac{xy}{zt} \cdot zy; \quad j) \frac{m}{nc} \cdot mnc; \quad k) n \cdot \frac{2}{m}; \quad l) 2x \cdot \frac{x}{4n};$$

$$m) \frac{2}{m} \cdot (3m); \quad n) \frac{x}{4n} \cdot (8n^2); \quad o) \frac{xy}{zt} \cdot (zy); \quad p) \frac{m}{nc} \cdot (mnc).$$

11

$$a) 3m^2n \cdot \frac{m}{n}; \quad b) \frac{4m^2}{5n} \cdot 10m^2n^3; \quad c) \frac{24vt}{zt^2} \cdot 0,5vz;$$

$$d) 25nt^2 \cdot \frac{2}{5at^3}; \quad e) \frac{m}{n^2b} \cdot mnb^3; \quad f) mnb \cdot \frac{5}{bn};$$

$$g) 3x \cdot \frac{x}{15}; \quad h) \frac{7m}{n} \cdot (4nm); \quad i) 3d \cdot \frac{d}{5c};$$

$$j) a^2 \cdot \frac{n^2m}{a}; \quad k) \frac{ad}{bc} \cdot (abcd).$$

12

$$a) 2a \cdot \frac{a}{3b} \cdot \frac{a}{6b}; \quad b) 3xy^2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{6x^2}{y}; \quad c) 6mn \cdot \frac{2mb}{3c} \cdot (2bc);$$

$$d) mnx \cdot \frac{mn}{x} \cdot \frac{3m}{2x^2}; \quad e) ax \cdot \frac{mn}{a} \cdot \frac{n^2}{x^2}; \quad f) a^3b^3 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3};$$

$$g) \frac{5a^2}{7b^3} \cdot \frac{35b}{15a} \cdot (5ab); \quad h) \frac{4a^2}{27b^3} \cdot \frac{45b}{3a^2} \cdot \frac{8b}{5a}.$$

13

$$a) \frac{1+x}{x+2} \cdot \frac{2+x}{x}; \quad b) \frac{a}{b} \cdot \frac{bx-by}{a^2}; \quad c) \frac{x^2-xy}{m} \cdot \frac{my}{x};$$

$$d) \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{8b}{ab-a^2}; \quad e) \frac{y^2}{2x} \cdot \frac{6x}{xy-y^2}; \quad f) \frac{xz-zt}{xt} \cdot \frac{t}{z^2};$$

14

$$a) \frac{2a+2b}{a} \cdot \frac{b}{a+b}; \quad b) \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m^2+m}{n}; \quad c) \frac{m^2-mn}{n} \cdot \frac{m}{m-n};$$

$$d) \frac{xz-zt}{xt} \cdot \frac{t}{z^2}; \quad e) \frac{cd}{a^2-ad} \cdot \frac{ac-cd}{ad}; \quad f) \frac{m^2-n^2}{2mn^2} \cdot \frac{4mn}{3m-3n}.$$

15

$$a) \frac{b}{c^2-bc} \cdot \frac{b^3}{c^2-b^2}; \quad b) \frac{m^2-2m}{n^2} \cdot \frac{m^2n-2mn}{n}; \quad c) \frac{m^2-n^2}{5mn^3} \cdot \frac{5mn}{3m-3n};$$

16

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{x^2z - zt^2}{x^2t} \cdot \frac{t+x}{xz}; \quad \text{ბ) } \frac{c^2d}{c^2 - 2cd + d^2} \cdot \frac{c}{cd - d^2}; \quad \text{გ) } \frac{mn + n^2}{2n} \cdot \frac{mn + n^2}{4m}. \\ & \text{ა) } \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{3b}; \quad \text{ბ) } \frac{3x - 3y}{x} \cdot \frac{3x^2}{y - x}; \quad \text{გ) } \frac{b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{(a - b)^2}{b^2}; \\ & \text{ა) } \frac{a^2 - c^2}{c} \cdot \frac{c - a}{c - b}; \quad \text{ბ) } \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a}{ab - b^2}; \quad \text{გ) } \frac{x^2 - y^2}{y^2} \cdot \frac{y}{9x - 9y}. \end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \left(\frac{-2m^3}{2n^2}\right)^2; \quad \text{ბ) } \left(\frac{-3a^2}{4b^4}\right)^3; \quad \text{გ) } \left(\frac{2}{x}\right)^5; \quad \text{დ) } \left(\frac{n-2}{x}\right)^2; \quad \text{ე) } \left(\frac{m}{3x}\right)^3; \\ & \text{ა) } \left(\frac{a+b}{2ab}\right)^5; \quad \text{ბ) } \left(\frac{a^2 - b^2}{(x-y)^2}\right)^2; \quad \text{გ) } \left(\frac{2c^3}{-d^2}\right)^5; \quad \text{დ) } \left(\frac{a^2b^3}{c^4}\right)^4; \quad \text{ე) } \left(\frac{(-a)^3b^2}{c^4}\right)^4. \end{aligned}$$

18

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \left(\frac{m-n}{n}\right)^2; \quad \text{ბ) } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2; \quad \text{გ) } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2; \quad \text{დ) } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2; \\ & \text{ე) } \left(\frac{5-a}{a-5}\right)^2; \quad \text{ვ) } \left(\frac{-9-m}{m-9}\right)^2; \quad \text{ზ) } \left(\frac{3-c}{c-3}\right)^3; \quad \text{თ) } \left(\frac{-7-x}{x-7}\right)^3. \end{aligned}$$

გამარტივებული გამოსახულება №19–28

19

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{ax^2 - ay^2}{2a + 8} \cdot \frac{3a + 12}{ay + ax}; \quad \text{ბ) } \frac{mx + my}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x^2 - xy}{7x + 7y}; \quad \text{გ) } \frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} \cdot \frac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}; \\ & \text{ა) } \frac{3n^2 - 3m^2}{n^2 + np} \cdot \frac{6n - 6m}{n + p}; \quad \text{ბ) } \frac{x^2 - 10x + 25}{3x + 12} \cdot \frac{x^2 - 16}{2x - 10}; \quad \text{გ) } \frac{1 - a^2}{4a + 8b} \cdot \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{3 - 3a}. \end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{3a + 6b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{5a + 10b}{a^2 - 2ab + b^2}; \quad \text{ბ) } \frac{x^2 + 4x + 4}{16 - y^4} \cdot \frac{4 - x^2}{4 + y^2}; \quad \text{გ) } \frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2y} \cdot \frac{ax + 3x}{4xy^2}; \\ & \text{ა) } \frac{ax + ay}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{4x + 4y}{ax^2 + 2axy + ay^2}; \quad \text{ბ) } \frac{am^2 - an^2}{m^2 + 2mn + n^2} \cdot \frac{am^2 - 2amn + an^2}{2m + 2n}. \end{aligned}$$

21

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{5x^2 - 10xy}{x^2 + 4y^2} \cdot \frac{x^4 - 16y^4}{15(x - 2y)^2}; \quad \text{ბ) } \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 + 7a + 12} \cdot \frac{a^2 + 3a}{a^2 - 4a + 4}; \\ & \text{ა) } \frac{b^2 - c^2}{b^2 - 2bc + c^2} \cdot \left(\frac{b-c}{b+c}\right); \quad \text{ბ) } \frac{b^2 + 6b + 9}{b^3 - 27} \cdot \frac{b^2 + 3b + 9}{b + 3}; \\ & \text{ა) } \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}; \quad \text{ბ) } -\frac{a^3 - 8}{a^2 - 4} \cdot \left(-\frac{a + 2}{a^2 + 2a + 4}\right). \end{aligned}$$

22

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \cdot \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}{x^3 + 3x^2 + x + 3}; \\ & \text{ბ) } \frac{a^3 - a^4 + 4a^2 - 4a}{a^2 - a^3 + 3a - 3a^2} \cdot \frac{a^3 - 5a + 3a^2 - 15}{a^3 - 2a^2 - 5a + 10}; \\ & \text{ა) } \frac{c^3 + 2c^2 - 3c - 6}{c^3 - c^2 - 3c + 3} \cdot \frac{-c^4 + c^3 + c^2 - c}{-c^3 + c^2 + 4c - 4}; \\ & \text{ა) } \frac{a^3 - a^2y^2 - ay + y^3}{a^2 + ay - ay^2 - y^3} \cdot \frac{a^3 - ay + a^2y^2 - y^3}{a^2 + ay^2 - ay - y^3}. \end{aligned}$$

23

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{y^3 - 5y^2 - 9y + 45}{y^3 + 3y^2 - 25y - 75} \cdot \frac{y^3 + 5y^2 - 3y - 15}{y^3 - 3y^2 - 3y + 9}; \\ & \text{ბ) } \frac{x^3 + 4x^2 - 5x - 20}{x^3 + 6x^2 - 3x - 18} \cdot \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x^3 + 2x^2 - 5x - 10}. \end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned} & \text{ა) } \frac{xy}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right); \quad \text{ბ) } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{y}\right) \cdot \frac{ab}{x} \cdot \frac{a}{x}; \quad \text{გ) } \left(\frac{y}{a^2} - \frac{y}{ab}\right) \cdot \frac{ab}{b-a} \cdot \frac{1}{a}; \\ & \text{ა) } \left(\frac{c}{x} - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{cx}; \quad \text{ბ) } \frac{mn^2}{n^2 - m^2} \cdot \left(\frac{2}{m} - \frac{2}{n}\right); \quad \text{გ) } \left(a - \frac{6a-4}{a+2}\right) \cdot \frac{a+2}{a^2 - 2a}; \end{aligned}$$

$$\text{ბ)} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2; \quad \text{თ)} \left(\frac{u}{u-v} - \frac{u}{u+v}\right) \cdot \frac{u^2 + uv}{2v}; \quad \text{ი)} \left(\frac{c-d}{d} + \frac{2c}{c-d}\right) \cdot \frac{c^2 + d^2}{c-d}.$$

25

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) \cdot \frac{4m}{10m-5}; & \text{ბ)} & \left(\frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{2a-2b}\right) \cdot \frac{2b}{a^2-b^2}; \\ \text{გ)} & \left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1}\right) \cdot \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}; & \text{დ)} & (x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right); \\ \text{ე)} & \left(\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x+a}\right) \cdot \frac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}; & \text{ვ)} & \left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{a^2+ab}\right) \cdot \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

26

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \frac{a}{1-b} + \frac{a^2-ab}{b^2-1} \cdot \frac{b+1}{a}; & \text{ბ)} & n - \frac{n^2-na}{n+a} \cdot \frac{n}{n-a}; & \text{გ)} & \frac{m^2-9}{m} \cdot \frac{(m-3)}{m} + \frac{6}{3-m}; \\ \text{დ)} & \frac{x+3}{1-x} + \frac{x+3}{x-1} \cdot (x+1); & \text{ე)} & \left(\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}\right) \cdot \left(\frac{x+a}{a} - \frac{x-a}{x}\right). \end{aligned}$$

27

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right); & \text{ბ)} & \left(\frac{1}{y} - y\right) \cdot \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right); \\ \text{გ)} & \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2+y^2}{xy} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right); & \text{დ)} & \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \left(\frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab}\right) \cdot \frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}; & \text{ბ)} & \left(\frac{y^2}{c-y} - \frac{c^2}{c-y}\right) \cdot \frac{c-y}{y+c} \cdot \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{y}\right); \\ \text{გ)} & \left(\frac{2a}{a+2} + \frac{2a}{6-3a} + \frac{8a}{a^2-4}\right) \cdot \frac{a-4}{a-2}; & \text{დ)} & \left(\frac{a}{b-a} - \frac{b}{b-a}\right) \cdot \frac{4ab}{a^2-b^2} \cdot \left(\frac{2a}{a+b} - \frac{2a}{a-b}\right); \\ \text{ე)} & \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) - \frac{a^2+b^2}{ab}; & \text{ვ)} & \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}\right) \cdot \frac{x-y}{x^2} \cdot \left(\frac{y}{x-y} + \frac{y}{x+y}\right). \end{aligned}$$

29

ჯერ გაამარტივე და შემდეგ გამოთვალე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \frac{a-a^3}{a^2-1} - \frac{a^2}{0,2} - \frac{a+a \cdot 0,1}{a}, \text{ როცა } a=-0,2; \\ \text{ბ)} & \frac{x^2-2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}x + \left(1 \cdot \frac{1}{3}\right)^2}{1 \cdot \frac{1}{3} - x} - \frac{x \cdot 0,1 - x^2}{x-10} - x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}, \text{ როცა } x=-0,4; \\ \text{გ)} & \frac{(1,5^2-1,7^2)b}{3,2} + \frac{b^2-b \cdot 0,2}{b}, \text{ როცა } b=-0,5. \end{aligned}$$

30

გამარტივე წილადი მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთსა და იმავე მამრავლზე გარკვევით:

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}}; & \text{ბ)} & \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{3}}; & \text{გ)} & \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}; & \text{დ)} & \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}; & \text{ე)} & \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}. \end{aligned}$$

31

$$\begin{aligned} \text{ა)} & \frac{x^5-xy^4}{x^2-2ax+a^2} \cdot \frac{x-a}{x^3+xy^2} - \frac{x^2-y^2}{x-a}; & \text{ბ)} & \left(\frac{4a}{a+2} - \frac{a^3-8}{a^3+8} \cdot \frac{4a^2-8a+16}{a^2-4}\right) \cdot \frac{16}{a+2}; \\ \text{გ)} & \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{2+a}{1-2a} + \frac{b-a}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a}\right). \end{aligned}$$

32

შაქრის ქარხლისაგან მიღებული შაქრის წონა ქარხლის წონის 14%-ია, ხოლო შაქრის ლერწმისაგან მიღებული შაქრის წონა – ლერწმის წონის 15%. რომელია მეტი: 55 კგ შაქრის ქარხლისაგან მიღებული შაქარი, თუ 50 კგ შაქრის ლერწმისაგან მიღებული?



## მესამე თავის მიმოხილვა

### რა ვისწავლეთ ამ თავში?

- ალგებრული წილადის ზოგადი სახე;
- ალგებრული წილადის ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობების დადგენა;
- ალგებრული წილადის ნულთან ტოლობის პირობების დადგენა;
- წილადის ძირითადი თვისებების ალგებრული წილადის გარდაქმნებში (შეკვეცა, გაერთმნიშვნელებიანება) გამოყენება;
- მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე;
- ალგებრული წილადის შემცველი ასოითი გამოსახულების გამარტივება.

### უპასუხე კითხვებს:

1. რას წარმოადგენს ალგებრული წილადი?
2. როგორი მნიშვნელობების მიღება არ შეუძლია ცვლადს ალგებრულ წილადში?
3. როგორ შეკრებ ტოლმნიშვნელოვან ალგებრულ წილადებს?
4. როგორ შეკრებ სხვადასხვა მნიშვნელობის მქონე ალგებრულ წილადებს?
5. როგორ გაამრავლებ ალგებრულ წილადებს?
6. როგორ გაყოფ ალგებრულ წილადებს?
7. რაში მდგომარეობს ალგებრული წილადის 0-თან ტოლობის პირობა?
8. შეკვეცის დროს ალგებრული წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის შესაყრებები იკვეცება თუ თანამამრავლები?
9. რა თანმიმდევრობით სრულდება მოქმედებები უფრჩხილებო ასოით გამოსახულებაში?
10. რა თანმიმდევრობით სრულდება მოქმედებები ფრჩხილების შემცველ ასოით გამოსახულებაში?

### შეურჩიე მარცხენა სვეტში მოცემულ წინადადებას სიტყვა მარჯვენა სვეტიდან

|                                                                                                               |                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| ალგებრული წილადის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს ----- შევუცვლით.                   | მნიშვნელი      |
| ალგებრული წილადი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა -----ნულის ტოლი, ხოლო ----- ნულისგან განსხვავებულია. | მნიშვნელზე     |
| ალგებრული წილადების გამრავლებისას მრიცხველი მრავლდება ----- , ხოლო მნიშვნელი ----- .                          | მრიცხველები    |
| ტოლმნიშვნელოვანი ალგებრული წილადების შეკრებისას იკრებება მათი ----- .                                         | მრიცხველზე     |
| ალგებრული წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ტოლი ----- იკვეცება.                                              | წევრები        |
| მრავალწევრის ნიშნით განსხვავებული მსგავსი ----- ბათილდება.                                                    | ნიშნებს        |
|                                                                                                               | თანამამრავლები |
|                                                                                                               | მრიცხველი      |

## სავარჯიშოები

1

შეკვეცე წილადი:

ა)  $\frac{5}{15x}$ ; ბ)  $\frac{3m}{-9m}$ ; გ)  $\frac{-11}{121}$ ; დ)  $\frac{-11x^2y}{121xy^2}$ ; ე)  $\frac{2ab^3}{12ab^2}$ ; ვ)  $\frac{ab(x+y)^3}{b(x+y)^2}$ .

2

გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა)  $\left(\frac{x^2+x^4}{x^2}\right)^{-1}$ , როცა  $x=0,5$ ; ბ)  $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ , როცა  $a=3,25$ ;  $b=3$ .

### შეასრულე მოქმედებები: №3-5

3

ა)  $\frac{a}{7} + \frac{b}{7}$ ; ბ)  $\frac{2m}{c} + \frac{3n}{c}$ ; გ)  $\frac{3v}{2a} + \frac{5v}{2a}$ ;  
 დ)  $\frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)}$ ; ე)  $\frac{3}{a-b} + \frac{4}{b-a}$ ; ვ)  $\frac{3}{2a} + \frac{5}{3b}$ ;  
 ზ)  $\frac{m}{a^2} + \frac{5}{ab}$ ; თ)  $\frac{b}{a^2} + \frac{c}{b^2}$ ; ი)  $\frac{x-1}{a} + \frac{x+2}{a} - \frac{x-3}{a}$ ;  
 კ)  $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ ; ლ)  $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}$ ; მ)  $\frac{m}{42} + \frac{4m}{21} - \frac{3m}{28}$ .

4

ა)  $\frac{5m-2}{5} + \frac{7m-3}{3}$ ; ბ)  $\frac{(x-1)^2}{2x} + \frac{(x+1)^2-2}{x^2}$ ; გ)  $\frac{(x+y)^2}{12} + \frac{(x-y)^2}{24} - \frac{x^2-y^2}{8}$ ;  
 დ)  $x + \frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{2}$ ; ე)  $-\frac{m-2}{5} - \frac{m+2}{2} + m+2$ ; ვ)  $m-n - \frac{m-3}{4} + \frac{n+4}{6}$ .

5

ამოხსენი განტოლება:

ა)  $2 + \frac{x+17}{5} = \frac{3x-7}{4}$ ; ბ)  $\frac{5y-7}{3} + \frac{3y+12}{4} = 2$ ;  
 გ)  $\frac{x-3}{x+3} = 0$ ; დ)  $\frac{25-y^2}{y^2+10y+25} = 0$ .

### გაამარტივე გამოსახულება: №6-8

6

ა)  $\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x}$ ; ბ)  $\frac{7}{x} - \frac{11}{2+x}$ ; გ)  $\frac{7}{x} - \frac{11}{2+x}$ ; დ)  $\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x+2}$ ;  
 ე)  $\frac{3}{a-1} - \frac{2}{a}$ ; ვ)  $\frac{2}{3(y+1)} + \frac{3}{y+1}$ ; ზ)  $\frac{2}{d-2} + \frac{1}{4(d-2)}$ ;  
 თ)  $\frac{1}{5(a+1)} + \frac{3}{2(a+1)}$ ; ი)  $\frac{1}{2(m-4)} - \frac{2}{3(m-4)}$ .

7

ა)  $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$ ; ბ)  $\frac{2}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}$ ; გ)  $\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y^2-9}$ ;  
 დ)  $\frac{2}{2x-2y} - \frac{7}{4x-4y}$ ; ე)  $\frac{1}{2x^2-2y^2} - \frac{2}{x+y}$ ; ვ)  $\frac{2}{2c-3d} - \frac{1}{4c^2-9d^2}$ .

8

ა)  $\frac{2}{m^2-4} - \frac{1}{m^2-2m}$ ; ბ)  $\frac{11}{5a-15} + \frac{2a+6}{9-a^2}$ ; გ)  $\frac{2x}{x-5} - \frac{5}{x+5} + \frac{2x^2}{25-x^2}$ .

შეასრულე გამრავლება: № 9-10

9 ა)  $\frac{5a}{b} \cdot \frac{b}{10a}$ ; ბ)  $\frac{a^2n}{b^2} \cdot \frac{b^3m^2}{10a^2}$ ; გ)  $\frac{u^2v^2}{y^3} \cdot \frac{y}{uv}$ ; დ)  $4a^2 \cdot \frac{b}{10a}$ ; ე)  $\frac{5a}{b} \cdot 12b^3c$ .

10 ა)  $\frac{3m-6n}{m+7} \cdot \frac{2m+14n}{m^2-4n^2}$ ; ბ)  $\frac{5-n}{n} \cdot \frac{7n^2}{n^2-25}$ ; გ)  $\frac{(c+2)^2}{2c-6} \cdot \frac{c^2-9}{5c+10}$ .

11 შეასრულე გაყოფა:

ა)  $\frac{3a}{b} : \frac{2a^2}{b^2}$ ; ბ)  $\frac{3n}{c^3} : \frac{18n^2}{c^2}$ ; გ)  $6b^3 : \frac{2a^2}{b^2}$ ; დ)  $\frac{3a}{b} : 12a$ ; ე)  $\frac{16xy^2}{25d^2} : \frac{12x^2y}{55d}$ .

12 გამოსახულება წარმოადგინე დადებითი ხარისხის მაჩვენებლით:

ა)  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1}$ ; ბ)  $\left(\frac{3}{m}\right)^{-3}$ ; გ)  $\left(2\frac{1}{2}-x\right)^{-2}$ ; დ)  $(a-2b)^{-2}$ ; ე)  $(0,3+m)^{-2}$ .

13 შეასრულე მოქმედებები:

ა)  $\left(\frac{2a}{b^2} - \frac{1}{2a}\right) : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}\right)$ ; ბ)  $\frac{y-3}{y+3} \cdot \left(y + \frac{y^2}{3-y}\right)$ ; გ)  $\frac{6a-3}{4a^2-a} \cdot \left(1 + \frac{2a}{2a-1}\right)$ ;  
დ)  $\left(x - \frac{5x}{2+x}\right) : \frac{x-3}{x+2}$ ; ე)  $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) : \frac{xy}{x^2-y^2}$ .

14 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა)  $\frac{4+2b+b^2}{1-b} : \frac{b^3-8}{1-b^2}$ , როცა  $b=-3$ ;

ბ)  $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3} : \frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$ , როცა  $x=2$ ,  $y=-0,5$

15 დაამტკიცე, რომ ქვემოთ მოცემული გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა ცვლადებზე დამოკიდებული არაა.

ა)  $\frac{(x-2y)^2 - (x+2y)^2}{xy}$ ; ბ)  $\frac{6y^2 - 4xy}{(x-y)^2 - (x-2y)^2}$ .

16 ავზი ორი ონკანით 5 საათში ივსება. რამდენ საათში აივსება ავზი თითოეული ონკანით, თუ ერთი ონკანით ავზი ორჯერ სწრაფად ივსება, ვიდრე – მეორე ონკანით.

17 თუ ზეზვა ესკალატორის მოძრავი კიბის ყოველ საფეხურს 1 წამში აივლის, მაშინ ზემოთ 20 წამში ავა, ხოლო თუ 1 წამში ორ საფეხურს აივლის, მაშინ ზემოთ ასვლას 15 წამში შეძლებს. რა დრო დასჭირდება ზეზვას ზემოთ ასასვლელად, თუ კიბეზე უძრავად იდგება?



აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ  $2n^3+3n^2+n$  გამოსახულების მნიშვნელობა ნებისმიერი ნატურალური  $n$ -თვის 6-ის ჯერადია

### ტესტი №3

1.  $\frac{m+n}{nm}$  გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა  $m=-2$  და  $n=0,8$ , ტოლია:  
ა)  $-2,7$ ;      ბ)  $0,8$ ;      გ)  $1,75$ ;      დ)  $0,75$ .
2.  $\frac{(a-b)^2}{a-b}$  გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა  $a=-1,5$  და  $b=0,1$  ტოლია:  
ა)  $-2,6$ ;      ბ)  $-1,4$ ;      გ)  $1,7$ ;      დ)  $-1,6$ .
3.  $\frac{3(a-b)}{2(b-a)}$  გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა  $a=2$  და  $b=37$  ტოლია:  
ა)  $17,5$ ;      ბ)  $-1,5$ ;      გ)  $-39$ ;      დ)  $12$ .
4.  $\frac{x+2}{x}$  გამოსახულებაში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებია:  
ა) ყველა რიცხვი, გარდა 2-ისა;      ბ) ნებისმიერი რიცხვი, გარდა  $x$ -ისა;  
გ) ყველა რიცხვი, გარდა 4-ისა;      დ) ყველა რიცხვი, გარდა 0-ისა.
5.  $\frac{4x-1}{x-5}$  გამოსახულებაში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებია:  
ა) ყველა რიცხვი, გარდა  $\frac{1}{4}$ -ისა;  
ბ) ყველა რიცხვი, გარდა 5-ისა;  
გ) ყველა რიცხვი, გარდა 1-ისა და 4-ისა;  
დ) ყველა რიცხვი, გარდა 5-ისა და 4-ისა.
6.  $\frac{x^2-25}{x-5} = 0$  განტოლების ამონახსნია:  
ა)  $-5$ ;      ბ)  $5$ ;      გ)  $-5$  და  $+5$ ;      დ) ამონახსნი არა აქვს.
7.  $\frac{3}{x}$  წილადის ტოლი წილადაა:  
ა)  $\frac{9a^2}{x^2}$ ;      ბ)  $\left(\frac{3}{x}\right)^2$ ;      გ)  $\frac{6mn}{2mnx}$ ;      დ)  $\frac{27}{x^3}$ .
8.  $(x+2y)^2$  იგივეა, რაც:  
ა)  $\frac{(2x+4y)^2}{4}$ ;      ბ)  $\frac{(2x+4y)^2}{2}$ ;      გ)  $\frac{(2x+4y)^2}{8}$ ;      დ)  $\frac{(2x+4y)^2}{2xy}$ .

9. სანდროს  $n$  დღის ნამუშევარში გადაუხადეს  $m$  ლარი. სანდროს ერთი დღის გასამრჯელოა:
- ა)  $\frac{n}{m}$ ;      ბ)  $\frac{m}{n}$ ;      გ)  $\frac{1}{m}$ ;      დ)  $\frac{1}{n}$ .
10. წილადის მრიცხველი გაზარდეს 50%-ით, ხოლო მნიშვნელი შეამცირეს 25%-ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა წილადი?
- ა) 100%-ით;      ბ) 75%-ით;      გ) 25%-ით;      დ) 200%-ით.
11. წილადის მრიცხველი შეამცირეს 10%-ით, ხოლო მნიშვნელი გაზარდეს 20%-ით. რამდენი პროცენტით შემცირდა წილადი?
- ა) 10%-ით;      ბ) 30%-ით;      გ) 25%-ით;      დ) 200%-ით.
12.  $\frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} =$
- ა)  $\frac{1}{b}$ ;      ბ)  $\frac{1}{a}$ ;      გ)  $\frac{a}{b}$ ;      დ)  $a$ .
13.  $\frac{a^2 + 6a + 9}{3 + a} =$
- ა)  $\frac{3+a}{3+b}$ ;      ბ)  $\frac{3+a}{a}$ ;      გ)  $a+3$ ;      დ)  $a^2+11$ .
14.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$
- ა)  $\frac{a+b}{b+a}$ ;      ბ)  $\frac{b^2+a}{ab}$ ;      გ)  $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ ;      დ)  $\frac{a^2+b^2}{ab}$ .
15. ცვლადის რა ნატურალური მნიშვნელობებისათვის იღებს  $\frac{3a+5}{a}$  გამოსახულება მთელ მნიშვნელობებს?
- ა) მხოლოდ 1-ისთვის;      ბ) მხოლოდ 5-ისთვის;
- გ) 1-ისა და 3-ისთვის;      დ) 1-ისა და 5-ისთვის.
16. აუზს მარტო ერთი მილი  $x$  საათში ავსებს, მარტო მეორე მილი  $y$  საათში. ორივე მილის ერთდროული მუშაობით 1 სთ-ში აივსება აუზის
- ა) 2 ნაწილი;      ბ)  $\frac{x+y}{xy}$  ნაწილი;      გ)  $\frac{1}{x+y}$  ნაწილი;      დ)  $\frac{x}{y}$  ნაწილი.
17. გამოთვალე მორბენალის საშუალო სიჩქარე, თუ 20 წუთის განმავლობაში იგი 18 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო 10 წუთის განმავლობაში 24 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობდა.
- ა) 20 კმ/სთ;      ბ) 42 კმ/სთ;      გ) 21 კმ/სთ;      დ) 30 კმ/სთ.



18. აბაზანა ივსება  $n$  წუთში და იცლება  $(2n+1)$  წუთში. აბაზანის რა ნაწილი აივსება 1 წუთში, თუ ონკანს გავხსნით და საცობსაც ამოვიღებთ?

- ა)  $n(2n+1)$ ;      ბ)  $\frac{n+1}{n(2n+1)}$ ;      გ)  $(2n+1):n$ ;      დ)  $n:(2n+1)$ .

19.  $a^{-2}+b^{-2}=$

- ა)  $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ ;      ბ)  $(a^2+b^2)^{-1}$ ;      გ)  $(a+b)^{-2}$ ;      დ)  $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ .

20. ნინო  $m$  წუთში  $n$  ფურცელს ბეჭდავს. რამდენ ფურცელს დაბეჭდავს ნინო 15 წუთში?

- ა)  $15mn$ ;      ბ)  $15m:n$ ;      გ)  $15n:m$ ;      დ)  $mn:15$ .

21.  $\frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} =$

- ა)  $\frac{2a+3}{a^2}$ ;      ბ)  $\frac{5}{a+a^2}$ ;      გ)  $\frac{2a^2+3a}{a^2}$ ;      დ)  $6:a^3$ .

22.  $\frac{4}{ab} - \frac{2}{a^2b} =$

- ა)  $\frac{4a-2b}{a^2b}$ ;      ბ)  $\frac{4a-2}{a^2b}$ ;      გ)  $\frac{4a^2-3ab}{a^2b^2}$ ;      დ)  $\frac{2a}{a^2b}$ .

23.  $\frac{a^3+64}{a+4} =$

- ა)  $a^2+16$ ;      ბ)  $a^2-8a+16$ ;      გ)  $a^2+4a+16$ ;      დ)  $a^2-4a+16$ .

24.  $\frac{ab}{a-b} : \frac{a}{a^2-b^2} =$

- ა)  $a^2(a+b)$ ;      ბ)  $b(a-b)$ ;      გ)  $b(a+b)$ ;      დ)  $ab(a-b)$ .

25.  $\frac{8xy}{ax+2ay} \cdot \frac{ax^2-4ay^2}{2x-4y} =$

- ა)  $8a(x+y)$ ;      ბ)  $a(x-y)$ ;      გ)  $4xy$ ;      დ)  $2x+4y$ .

## თავი 4. ფართობი

### ამ თავში ისწავლი:

- ❖ ფართობის თვისებებს;
- ❖ ფართობის გამოთვლას ზადის გამოყენებით;
- ❖ სამკუთხედის ფართობის გამოთვლას გვერდითა და სიმაღლით;
- ❖ პარალელოგრამის ფართობის გამოთვლას გვერდითა და სიმაღლით;
- ❖ რომბის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს;
- ❖ ტრაპეციის ფართობის გამოთვლას ფუძეებითა და სიმაღლით;
- ❖ ურთიერთმართობული დიაგონალების მქონე ოთხკუთხედის ფართობის გამოთვლას.

### თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- ❖ ფართობის თვისებების გამოყენებას ფიგურის ფართობის დასადგენად;
- ❖ ფართობის გამოთვლას კვადრატული ზადის დახმარებით;
- ❖ ფორმულების გამოყენებას სხვადასხვა სახის (სამკუთხედის, პარალელოგრამის, რომბის, ტრაპეციის) ფართობის გამოსათვლელად;
- ❖ ფართობის გამოსათვლელი ფორმულების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებას.



**პროექტი:**  
**„საქართველოს  
დაცული  
ტერიტორიები“**



საქართველოს აქვს დაცული ტერიტორიები.

ა) მოიძიე ინფორმაცია ამ ტერიტორიების შესახებ.

ბ) შეადგინე ცხრილი მათი ფართობის ზრდის მიხედვით და გამოთვალე საქართველოს ტერიტორიის რამდენ პროცენტს შეადგენს დაცული ტერიტორია.

გ) მოამზადე ბროშურა (ელ. ვერსია) ინფორმაციებითა და სათანადო ფოტოებით.

დ) მოცემული თემის მიხედვით დასვი კითხვები, რომელთა პასუხის გასაცემად მათემატიკა დაგჭირდება და უპასუხე.

### აბა, სცადე!

გამოთვალე ABCD ფრანის ფართობი, თუ მისი AC დიაგონალის სიგრძეა 8 სმ, ხოლო BD დიაგონალის სიგრძე – 5 სმ.

