მათემატიკა 11

მოსწავლის წიგნი

2023

ს ა რ ჩ ე ვ ი

სახელმძღვანელოში გამოყენებული პირობითი ნიშნები და რუბრიკები

პირობითი ნიშნები

– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული სტანდარტული დავალებები

– პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული არასტანდარტული (მაღალი კოგნიტური დონის) დავალებები

– გამეორებასთან დაკავშირებული დავალებები

რუბრიკები

შესაძლებელია თუ არა? აბა, სცადე!	კვლევითი ხასიათის დავალებები
ჯგუფური სამუშაო **წყვილებში სამუშაო**	დავალებები, რომელთაც მოსწავლეთა ჯგუფები ან წყვილები ასრულებენ კლასში.

თავი 1. მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

ამ თავში გაიმეორებ:

- გამონათქვამთა ჯამისა და ნამრავლის განმარტებებსა და მათ ჭეშმარიტების ცხრილს;
- პირობითი გამონათქვამისა და ტოლფასობის განმარტებებსა და მათ ჭეშმარიტების ცხრილს;
- პირობითი გამონათქვამის შებრუნებული, მოპირდაპირე და ტოლფასი გამონათქვამების კონსტრუქციებს;
- გამონათქვამის უარყოფის განმარტებას;
- გამონათქვამთა ჯამისა და ნამრავლის უარყოფის ფორმულებს;
- თეორემის დამტკიცების საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდს;
- შებრუნებული, მოპირდაპირე და ტოლფასი თეორემების კონტრუქციებს.

ამ თავში ისწავლი:

- ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არის ცნებას;
- მათემატიკური გამონათქვამების სახეობებს;
- მათემატიკური თეორიის აგების სქემას;
- თეორემის დამტკიცების მეთოდებს.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- გამონათქვამთა ჭეშმარიტების ცხრილების შედგენას;
- გამონათქვამთა ტოლფასობის დასადგენად ჭეშმარიტების ცხრილების გამოყენებას;
- ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არის დადგენას;
- მათემატიკური გამონათქვამების სახეობათა გარჩევას;
- თეორემის შებრუნებულის, მოპირდაპირესა და ტოლფასის აგებას;
- თეორემის დასამტკიცებლად დედუქციისა და საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდების გამოყენებას.

ადა ბაირონი
1815-1852 წ.
დიდი ინგლისელი პოეტის, ჯორჯ ბაირონის ქალიშვილი, პირველი პროგრამისტი ქალი.
მან შექმნა კალკულატორის პროგრამა და აღწერა ალგორითმიზაციის ძირითადი პრინციპები.

კომპლექსური დავალება
„აუცილებელი და საკმარისი“

ადამიანს ამა თუ იმ მიზნის მისაღწევად გარკვეული გადაწყვეტილების მიღება და შესაბამისი მოქმედების განხორციელება ესაჭიროება.

გადაწყვეტილების მიღებისას მნიშვნელოვანია გავარკვიოთ, რამდენად აუცილებელი ან რამდენად საკმარისია დასახული მიზნისთვის ესა თუ ის ქმედება.

იმისათვის, რომ თეორიული ან პრაქტიკული პრობლემა გადაჭრა, აუცილებელია კარგად გაიაზრო მისი არსი, დასახო მოქმედებათა ის მინიმუმი, რომელიც შედეგამდე მიგიყვანს. ანუ უნდა დაადგინო პრობლემის გადაჭრისთვის აუცილებელი და საკმარისი მოქმედებები.

მათემატიკაში დებულებების სიტყვების „აუცილებელი“ და „საკმარისი“ გამოყენებით ჩამოყალიბება ცნებათა თვისებებისა და მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირის ნათლად წარმოდგენაში გვეხმარება. მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითები:

იმისათვის, რომ ნატურალური რიცხვი 6-ზე გაიყოს, საკმარისია, ეს რიცხვი გაიყოს 12-ზე, თუმცა, ეს არაა აუცილებელი. მაგალითად, 18 იყოფა 6-ზე, მაგრამ არ იყოფა 12-ზე.

იმისათვის, რომ რიცხვი 6-ზე გაიყოს, აუცილებელია, რომ რიცხვი გაიყოს 3-ზე, მაგრამ ეს არაა საკმარისი. მაგალითად, 9 იყოფა 3-ზე და არ იყოფა 6-ზე.

იმისათვის, რომ რიცხვი 6-ზე გაიყოს აუცილებელია და საკმარისი, რიცხვი გაიყოს 2-ზე და 3-ზე.

შენი დავალება:

1. მოცემულ წინადადებებში გამოტოვებულ ადგილას ჩასვი შემდეგი სიტყვებიდან ერთ-ერთი: „აუცილებელია და არაა საკმარისი“, „საკმარისია და არაა აუცილებელი“, „აუცილებელია და საკმარისი“ ისე, რომ მიღებული წინადადება იყოს მართებული:

ა) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი . . . სამივე კუთხე ჰქონდეთ ტოლი;

ბ) იმისათვის, რომ ორი სამკუთხედი იყოს ტოლი . . . სამივე გვერდი ჰქონდეთ ტოლი;

გ) იმისათვის, რომ პარალელოგრამი იყოს მართკუთხედი . . . მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;

დ) იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი იყოს მართკუთხედი . . . მისი დიაგონალები იყოს ტოლი;

ე) იმისათვის, რომ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი . . . A იყოს მცდარი;

ვ) იმისათვის, რომ $A \vee B$ გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი . . . A იყოს ჭეშმარიტი;

ზ) იმისათვის, რომ $A \wedge B$ გამონათქვამი იყოს მცდარი . . . A იყოს მცდარი.

2. ჩასმის შედეგად მიღებული წინადადებების მართებულობა დაასაბუთე დედუქციის, კონტრმაგალითის ან საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენებით.

3. შეადგინე მართებული წინადადებები მათემატიკის, მეცნიერებისა და ყოფაცხოვრების სხვადასხვა სფეროდან, რომელთა ჩამოყალიბებაში მონაწილეობას მიიღებს სიტყვათა წყობა: „აუცილებელია და არაა საკმარისი“, „საკმარისია და არაა აუცილებელი“, „აუცილებელია და საკმარისი“.

4. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- ყოფისა და მეცნიერების რა სფეროებიდან მოიძიე შესაბამისი მაგალითები;
- დასაბუთების რა მეთოდები გამოიყენე;
- სასკოლო სახელმძღვანელოს გარდა, კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად.

1.1 მოქმედებები გამონათქვამებზე

მიზანი

ლოგიკური მოქმედებების გახსენება, ჭეშმარიტების ცხრილის აგება და გამონათქვამთა ტოლფასობის დასადგენად გამოყენება

გამონათქვამი არის წინადადება, რომელზეც შეიძლება ითქვას, რომ ის ჭეშმარიტია ან მცდარია. მაგალითად,

ა) 9 კენტი რიცხვია;

ბ) 9 მარტივი რიცხვია.

მოცემული ორივე წინადადება გამონათქვამია, ამასთან, ა) წინადადება ჭეშმარიტია, ხოლო ბ) წინადადება – მცდარი.

გამონათქვამებს დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ (თუმცა, შესაბამის ლიტერატურაში ზოგჯერ პატარა ასოებითაც აღნიშნავენ).

პირველ რიგში გავიხსენოთ „ან“ , „და“ კავშირებით და „თუ . . . , მაშინ“ და „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“ სიტყვებით ნაწარმოები ლოგიკური ოპერაციები გამონათქვამებზე.

ვთქვათ, A და B მოცემული გამონათქვამებია.

1. „A ან B“ – გამონათქვამების **ჯამი, ანუ დიზიუნქცია,** აღინიშნება ჩანაწერით: $A+B$ ან $A \vee B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული A და B გამონათქვამებიდან ერთი მაინცაა ჭეშმარიტი.

მაგალითად, განვიხილოთ გამონათქვამები:

ა) $8<10$ ან $3>5$;

ბ) $2+3=5$ ან $7-1=6$;

გ) $5^2=15$ ან $4\cdot6=26$.

ა) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია მასში მონაწილე ერთ-ერთი გამონათქვამი, ბ) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი, ხოლო გ) გამონათქვამი მცდარია, რადგან მცდარია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი.

2. „A და B“ – გამონათქვამების **ნამრავლი, ანუ კონიუნქცია**, აღინიშნება ჩანაწერით: $A\cdot B$ ან $A\wedge B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ორივე გამონათქვამი.

მაგალითად, გამონათქვამებიდან:

ა) $8<10$ და $3>5$;

ბ) $2+3=5$ და $7-1=6$;

გ) $5^2=15$ და $4\cdot6=26$.

ა) გამონათქვამი მცდარია, რადგან ჭეშმარიტია მასში მონაწილე მხოლოდ ერთი გამონათქვამი, ბ) გამონათქვამი ჭეშმარიტია, რადგან ჭეშმარიტია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი, ხოლო გ) გამონათქვამი მცდარია, რადგან მცდარია მასში მონაწილე ორივე გამონათქვამი.

3. „თუ A, მაშინ B“ **– პირობითი გამონათქვამი,** ანუ **იმპლიკაცია,** აღინიშნება ჩანაწერით: $A\Rightarrow B$ ან $A\rightarrow B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტი, ხოლო B მცდარი გამონათქვამია.

მაგალითად, გამონათქვამებიდან:

ა) $8<10\Rightarrow3>5$;

ბ) $2+3=5\Rightarrow7-1=6$;

გ) $5^2=15\Rightarrow4\cdot6=26$.

მხოლოდ ა) გამონათქვამია მცდარი, რადგან 8<10 ჭეშმარიტი, ხოლო 3>5 მცდარი გამონათქვამია.

$A \Rightarrow B$გამონათქვამში A გამონათქვამს ეწოდება **პირობა**, ხოლო B გამონათქვამს **დასკვნა**.

$A \Rightarrow B$ პირობითი გამონათქვამის წაკითხვის სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს. მაგალითად: „A-დან გამომდინარეობს B“, „B-სთვის საკმარისია A“, „A-სთვის აუცილებელია B“, „A-ს შედეგია B“ და სხვ.

„A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B“ – **ტოლფასობა** ანუ **ექვივალენცია,** აღინიშნება ჩანაწერით $A \Leftrightarrow B$ ან $A \leftrightarrow B$ და ეწოდება გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ან ორივე გამონათქვამი მცდარი. მაგალითად, გამონათქვამებიდან:

ა) $8<10 \Leftrightarrow 3>5$;

ბ) $2+3=5 \Leftrightarrow 7-1=6$;

გ) $5^2=15 \Leftrightarrow 4\cdot 6=26$,

ა) არის მცდარი გამონათქვამი, რადგან 8<10 ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ხოლო 3>5 მცდარი, ბ) ჭეშმარიტია, რადგან ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ხოლო გ) ჭეშმარიტია, რადგან ორივე გამონათქვამი მცდარია.

განმარტებულ გამონათქვამებს შედგენილი ანუ რთული გამონათქვამები ეწოდება. ასეთი გამონათქვამების მნიშვნელობის დასადგენად ჭეშმარიტების ცხრილები გამოიყენება. 1-ელი ცხრილით ოთხივე შედგენილი გამონათქვამის ჭეშმარიტების ცხრილი ერთადაა წარმოდგენილი.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ	მ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ
მ	მ	მ	მ	ჭ	ჭ

ცხრილი 1

ორ P და Q გამონათქვამს ეწოდება **ტოლფასი**, თუ მათ მიერ შედგენილი $P \Leftrightarrow Q$ ტოლფასობა ჭეშმარიტი გამონათქვამია. ტოლფას გამონათქვამებს ერთი და იგივე ჭეშმარიტების ცხრილი აქვთ. იმ ფაქტის აღსანიშნავად, რომ P და Q ტოლფასი გამონათქვამებია, $P=Q$ ტოლობას გამოვიყენებთ.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ $A \Leftrightarrow B$ და $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ტოლფასი გამონათქვამებია.

დამტკიცება. საკმარისია, შევადგინოთ და შევადაროთ მოცემული გამონათქვამების ჭეშმარიტების ცხრილები.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	მ	მ
მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ

ცხრილი 2

ვხედავთ, რომ მე-2 ცხრილში A-სა და B-ს ყველა მნიშვნელობისათვის $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამების მნიშვნელობები ემთხვევა, რაც მათ ტოლფასობას ნიშნავს.

მაგალითი 2. მოცემულია ორი გამონათქვამი:

A: ოთხკუთხედი პარალელოგრამია;

B: ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

დავამტკიცოთ, რომ A და B ტოლფასი გამონათქვამებია. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია, როგორც $A \Rightarrow B$, ისე მისი შებრუნებული $B \Rightarrow A$ გამონათქვამი.

$A \Rightarrow B$ გამონათქვამი სიტყვიერად ნიშნავს:

თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

თუ A ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ანუ თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ პარალელოგრამის თვისების გამო მისი დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. ე.ი. B გამონათქვამიც ჭეშმარიტია და ამიტომ ჭეშმარიტია $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი. თუ A მცდარი გამონათქვამია, მაშინ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი განმარტების თანახმადაა ჭეშმარიტი.

$B \Rightarrow A$ გამონათქვამი სიტყვიერად ნიშნავს:

თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

თუ B ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ანუ თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ პარალელოგრამის ნიშნის თანახმად, ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ე.ი. A გამონათქვამიც ჭეშმარიტია და ამიტომ, ჭეშმარიტია $B \Rightarrow A$ გამონათქვამი. თუ B მცდარი გამონათქვამია, მაშინ $B \Rightarrow A$ გამონათქვამი განმარტების თანახმადაა ჭეშმარიტი.

დამტკიცებული B=A ტოლფასობა სიტყვიერად შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ:

ოთხკუთხედი პარალელოგრამია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

ან, რაც იგივეა:

იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი პარალელოგრამი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, ოთხკუთხედის ორივე დიაგონალი გადაკვეთის წერტილით შუაზე გაიყოს.

თუ $A \Rightarrow B$ პირობით გამონათქვამში პირობას და დასკვნას გადავანაცვლებთ, მივიღებთ მოცემულის **შებრუნებულ** $B \Rightarrow A$ გამონათქვამს. მე-2 ცხრილიდან ჩანს, რომ საზოგადოდ, $A \Rightarrow B$ და $B \Rightarrow A$ ტოლფასი გამონათქვამები არაა.

მაგალითად, ორი გამონათქვამი:

A: რიცხვი 7-ის ტოლია,

B: რიცხვი კენტია,

არაა ტოლფასი გამონათვამები. მართლაც, $A \Rightarrow B$ ჭეშმარიტი გამონათქვამია, რადგან 7 კენტი რიცხვია, მაგრამ $B \Rightarrow A$ მცდარია, რადგან კენტი რიცხვი შეიძლება 7-ის ტოლი არ იყოს.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ $A \Rightarrow B$ გამონათქვამის ჭეშმარიტების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ A ჭეშმარიტია, მაშინ ჭეშმარიტია B-ც, რადგან A-ს მცდარობის შემთხვევაში, $A \Rightarrow B$ გამონათქვამი B-ს მნიშვნელობისგან დამოუკიდებლადაა ჭეშმარიტი.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ წინადადებას ეწოდება გამონათქვამი?
2. რა შემთხვევაშია მცდარი ორი გამონათქვამის ჯამი?
3. რა შემთხვევაშია ჭეშმარიტი ორი გამონათქვამის ნამრავლი?
4. რა კომპონენტებისაგან შედგება პირობითი გამონათქვამი?
5. როგორ გამონათქვამებს ეწოდება ტოლფასი?

სავარჯიშოები

1 ვთქვათ, A ჭეშმარიტი, ხოლო B მცდარი გამონათქვამია. შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელი გამონათქვამებია მცდარი?

ა) $A \Rightarrow B$; ბ) $A \vee B$; გ) $B \Rightarrow A$; დ) $A \wedge B$; ე) $A \Leftrightarrow B$.

2 დაასაბუთე, რომ ტოლფასია გამონათქვამები:

ა) $A \vee B$ და $B \vee A$; ბ) $A \wedge B$ და $B \wedge A$; გ) A და $A \vee A$; დ) A და $A \wedge A$.

3 მაშომ და ლუკამ გამოთქვეს ვარაუდი გამოსახულების მნიშვნელობაზე:
მაშო: მნიშვნელობა კენტია ან 10-ზე მეტი;
ლუკა: მნიშვნელობა კენტია და 10-ზე მეტი.
დაადგინე, ამ ორი ვარაუდიდან რომელია მცდარი, თუ გამოსახულების მნიშვნელობა 9-ის ტოლი აღმოჩნდა.

4 მასწავლებელმა ტატოს დაავალა ამოეხსნა, სულ მცირე, 10 მაგალითი ან 5 ამოცანა. ტატომ ამოხსნა 12 მაგალითი და 3 ამოცანა. შეასრულა თუ არა ტატომ დავალება?

5 მასწავლებელმა ნიცას დაავალა ამოეხსნა, სულ მცირე, 10 მაგალითი და 5 ამოცანა. ნიცამ ამოხსნა 12 მაგალითი და 3 ამოცანა. შეასრულა თუ არა ნიცამ დავალება?

6 კლასში 11 მოსწავლე ქერაა, 8 – ცისფერთავლება, ხოლო 6 – ქერა და ცისფერთავლება. რამდენი მოსწავლეა კლასში ქერა ან ცისფერთვალება?

7 კლასის 15 მოსწავლე ვარჯიშობს კალათბურთის სექციაში, 12 – ფრენბურთის სექციაში, ხოლო 24 – კალათბურთის ან ფრენბურთის სექციებში. რამდენი მოსწავლე ვარჯიშობს კალათბურთის და ფრენბურთის სექციაში?

8 მოცემულია ორი წინადადება:
ა) n და m კენტი ნატურალური რიცხვებია;
ბ) n ან m კენტი ნატურალური რიცხვია.
ამ წინადადებებიდან რომელია მცდარი, თუ ცნობილია, რომ n+m კენტი ნატურალური რიცხვია?

9 შემდეგი პირობითი გამონათქვამებიდან რომლებია ჭეშმარიტი?
ა) თუ 11 ლუწი რიცხვია, მაშინ 12 მარტივი რიცხვია;
ბ) თუ 12 შედგენილი რიცხვია, მაშინ 11 ლუწი რიცხვია;
გ) თუ $3>4$ ან $4>3$, მაშინ $5>6$;
დ) თუ $3>4$ და $4>3$, მაშინ $5>6$.

10 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისათვის ჭეშმარიტია გამონათქვამი:
ა) $A \Rightarrow (A \vee B)$; ბ) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$; გ) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.

11 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი P, Q და R გამონათქვამებისათვის ჭეშმარიტია გამონათქვამი:
$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

12 დაამტკიცე მოცემული გამონათქვამების ტოლფასობა:
ა) ნატურალური რიცხვი იყოფა 3-ზე;
ბ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერის ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე.

13 დაამტკიცე მოცემული გამონათქვამების ტოლფასობა;
ა) პარალელოგრამი რომბია;
ბ) პარალელოგრამის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

14 დაადგინე ტოლფასია თუ არა მოცემული გამონათქვამები:
ა) ოთხკუთხედი რომბია;
ბ) ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია.

15 მოცემულია ორი გამონათქვამი:
A: რიცხვი 23-ის ტოლია;
B: რიცხვი მარტივია.
ჩამოაყალიბე $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამები სიტყვიერად და გაარკვიე მათი ჭეშმარიტება-მცდარობა.

16 მოცემულია ორი გამონათქვამი:
A: სამკუთხედი მართკუთხაა;
B: სამკუთხედის ორი გვერდის კვადრატების ჯამი მესამე გვერდის კვადრატის ტოლია.
ჩამოაყალიბე $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამები სიტყვიერად და გაარკვიე მათი ჭეშმარიტება-მცდარობა.

17 მოცემულია ორი გამონათქვამი:
A: რიცხვს გამყოფების კენტი რაოდენობა აქვს;
B: რიცხვი სრული კვადრატია.
ჩამოაყალიბე $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ გამონათქვამები სიტყვიერად და გაარკვიე მათი ჭეშმარიტება-მცდარობა.

18 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი P, Q და R გამონათქვამებისათვის სრულდება ტოლობა:
ა) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$; ბ) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

1.2 ცვლადიანი გამონათქვამი (პრედიკატი)

მიზანი

ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არისა და ტოლფასობის ცნებათა განმარტება და გამოყენება

განვიხილოთ უტოლობა: $x^2-6x+8>0$. ეს უტოლობა არაა გამონათქვამი, რადგან შეუძლებელია ვთქვათ, რომ ის ჭეშმარიტია ან მცდარია. მაგრამ, თუ ამ უტოლობაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ 5-ს, მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამს, ხოლო თუ ჩავსვამთ 3-ს, მიღებული გამონათქვამი იქნება მცდარი.

ცვლადის (ცვლადების) შემცველ წინადადებას, რომელიც ცვლადის (ცვლადების) კონკრეტული მნიშვნელობებით ჩანაცვლების შემდეგ გამონათქვამად გადაიქცევა, **ცვლადიანი გამონათქვამი** ანუ **პრედიკატი** ეწოდება.

ცვლადიან გამონათქვამში, მისი შინაარსიდან გამომდინარე, ცვლადი შეიძლება იღებდეს როგორც რიცხვით, ისე სხვა სახის მნიშვნელობებს. მაგალითად:

ა) „x კენტი რიცხვია“ პრედიკატის შემთხვევაში x ცვლადი ღებულობს რიცხვით მნიშვნელობებს;

ბ) „x ოთხკუთხედი პარალელოგრამია“ პრედიკატში x ოთხკუთხედების სიმრავლის ელემენტია;

გ) „x კენტი ფუნქციაა“ პრედიკატში x რიცხვით ფუნქციათა სიმრავლის ელემენტია.

პრედიკატი შეიძლება რამდენიმე ცვლადიანი იყოს. მაგალითად, ჩანაწერი „$x^2+y^2=1$“ ორცვლადიანი, ხოლო „$x^2+y^2=z^2$“ სამცვლადიანი პრედიკატია.

პრედიკატის, ანუ ცვლადიანი გამონათქვამის აღნიშვნაში ცვლადებს უთითებენ. მაგალითად, $A(x)$: $2x=3$, ან $A(x;y;z)$: $x^2+y^2=z^2$.

ცვლადის (ცვლადების) ყველა იმ ნიშვნელობათა ერთობლიობას, რომელთათვისაც ცვლადიანი გამონათქვამი ჭეშმარიტი გამონათქვამია, ცვლადიანი გამონათქვამის **ჭეშმარიტების არეს** უწოდებენ. მაგალითად, „$x^2-6x+8>0$“ ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არეა $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$ სიმრავლე (ახსენი, რატომ?).

ტოლი ჭეშმარიტების არის მქონე ცვლადიან გამონათქვამებს **ტოლფასი ცვლადიანი გამონათქვამები** ეწოდება. მაგალითად, „$x^2-1=0$“ და „$|x|=1$“ ტოლფასი ცვლადიანი გამონათქვამებია, რადგან ორივეს ჭეშმარიტების არეა $\{-1; +1\}$ სიმრავლე.

მაგალითი. მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი: A: $2x+3>7$; B: $5-3x>-4$.

დავადგინოთ $A\wedge B$ და $A\vee B$ გამონათქვამთა ჭეშმარიტების არეები.

ამოხსნა. $A\wedge B$ ნამრავლი ჭეშმარიტია ნიშნავს, ჭეშმარიტია როგორც A, ისე B უტოლობა. ეს კი მაშინ და მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა x არის $\begin{cases}2x+3>7\\5-3x>-4\end{cases}$ სისტემის ამონახსნი, ანუ $x\in(-\infty;3)\cap(2;+\infty)=(2;3)$.

$A\vee B$ ჯამი ჭეშმარიტია ნიშნავს, ჭეშმარიტია A ან B უტოლობა. ეს კი მაშინ და მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა x არის $\left[\begin{aligned}&2x+3>7\\&5-3x>-4\end{aligned}\right.$ გაერთიანების ამონახსნი,

ანუ $x\in(-\infty;3)\cup(2;+\infty)=(-\infty;+\infty)$.

პასუხი. $A\wedge B$-ს ჭეშმარიტების არეა $(2;3)$ შუალედი, $A\vee B$-ს ჭეშმარიტების არეა $(-\infty;+\infty)$ შუალედი.

უპასუხე კითხვებს:

1. არის თუ არა პრედიკატი გამონათქვამი?
2. რა არის პრედიკატის ჭეშმარიტების არე?
3. რა შემთხვევაშია ორი პრედიკატი ტოლფასი?

სავარჯიშოები

1 მოცემული სამეულებიდან რომელი ეკუთვნის „$x^2+y^2=z^2$“ პრედიკატის ჭეშმარიტების არეს?

ა) 1, 2, 3; ბ) 2, 3, 4; გ) 3, 4, 5; დ) 5, 6, 7.

2 იპოვე ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არე:

ა) $x^2-4=0$; ბ) $x^2-4x+3=0$; გ) $x^2-8x+15\leq 0$; დ) $x^2\geq 8$.

3 იპოვე ცვლადიანი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არე:

ა) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება 0-ით;

ბ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება 0-ით ან 5-ით;

გ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება ლუწი ციფრით;

დ) ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი ბოლოვდება კენტი ციფრით.

4 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $2x-1>7$; B: $3x+5<8$.

იპოვე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

5 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $4x-y=3$; B: $2x+y=9$.

იპოვე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

6 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $y+2x\geq 4$; B: $x-3y\geq 6$.

საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

7 მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:

A: $x^2+y^2\leq 4$; B: $x^2+y^2\geq 1$.

საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხე $A\wedge B$ და $A\vee B$ ცვლადიანი გამონათქვამების ჭეშმარიტების არეები.

8 მოცემულია სამი გამონათქვამი:

A: ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია;

B: ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია;

C: ოთხკუთხედი კვადრატია.

ჩამოაყალიბე სიტყვიერად და დაადგინე $(A\wedge B)\Rightarrow C$ პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტების არე.

1.3 გამონათქვამის უარყოფა. კონტრმაგალითი

მიზანი

გამონათქვამის უარყოფის კონსტრუქციის აგება; გამონათქვამის მცდარობის კონტრმაგალითის მეთოდით დამტკიცება; „და“ და „ან“ კავშირების უარყოფის ფორმულები.

განვიხილოთ ორი გამონათქვამი:

A: „სამკუთხედი ტოლფერდაა“

B: „სამკუთხედი არაა ტოლფერდა“

ცხადია, რომ თუ ჭეშმარიტია A გამონათქვამი, მაშინ მცდარია B გამონათქვამი და პირიქით, თუ მცდარია A გამონათქვამი, მაშინ ჭეშმარიტია B გამონათქვამი. მოცემულ B გამონათქვამს A გამონათქვამის **უარყოფა** ეწოდება.

განმარტება. A გამონათქვამის უარყოფა ეწოდება ისეთ გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია, თუ A მცდარია და მცდარია, თუ A ჭეშმარიტია.

A გამონათქვამის უარყოფა $\overline{A}$ ან ¬A ჩანაწერით აღინიშნება.

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია გამონათქვამისა და მისი უარყოფის მაგალითები:

A	$\overline{A}$
11 კენტი რიცხვია	11 არაა კენტი რიცხვი
სირაქლემა ფრინველია	სირაქლემა არაა ფრინველი
თბილისი საქართველოს დედაქალაქია	თბილისი არაა საქართველოს დედაქალაქი
არსებობენ მფრინავი თევზები	არ არსებობენ მფრინავი თევზები ან არცერთი თევზი არ ფრენს
ყველა ფრინველმა იცის ფრენა	არსებობს ფრინველი რომელმაც არ იცის ფრენა.

ამრიგად, როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, A და $\overline{A}$ გამონათქვამებიდან ერთი-ერთი ჭეშმარიტია, მეორე კი მცდარი.

გამონათქვამის უარყოფის საწარმოებლად ვიყენებთ ნაწილაკს „არ“ (ან „არა“), მაგრამ, თუ გამონათქვამი უკვე შეიცავს „არ“ ნაწილაკს, მაშინ ამ გამონათქვამის უარყოფისათვის ეს ნაწილაკი უნდა გამოვტოვოთ. მაგალითად, გამონათქვამის „მე არ ვიყავი სკოლაში“ უარყოფა იქნება „მე ვიყავი სკოლაში“.

ზოგჯერ უარყოფას არასწორად აწარმოებენ. მაგალითად, არის თუ არა გამონათქვამის „სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა“ უარყოფა „სამკუთხედი მახვილკუთხაა“? მართალია, ორივე ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტი ერთდროულად ვერ იქნება, მაგრამ თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ ორივე გამონათქვამი მცდარი აღმოჩნდება, რაც ეწინააღმდეგება უარყოფის განმარტებას.

ცხრილში მოცემული გამონათქვამი „ყველა ფრინველმა იცის ფრენა“, მცდარი გამონათქვამია. ამის დასამტკიცებლად არაა საკმარისი მისი უარყოფის „არსებობს ფრინველი რომელმაც არ იცის ფრენა“ ჩამოყალიბება. საჭიროა მოვიყვანოთ ერთი მაინც ისეთი ფრინველის მაგალითი, რომელმაც არ იცის ფრენა. ასეთია მაგალითად პინგვინი. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ პინგვინი არის გამონათქვამის „ყველა ფრინველმა იცის ფრენა“ მცდარობის დამამტკიცებელი **კონტრმაგალითი.**

ცხრილში გამონათქვამები და მათი მცდარობის დამამტკიცებელი კონტრმაგალითებია მოცემული.

გამონათქვამი	კონტრმაგალითი
ყველა ყვავილი სურნელოვანია	გვირილა არ არის სურნელოვანი
ყველა ცხოველი ძუძუმწოვარაა	ნიანგი არაა ძუძუმწოვარა
ყველა გზა რომში მიდის	თბილისი-კოჯრის გზა რომში არ მიდის
ყველა ჩემი კლასელი ფრიადოსანია	ჩემი კლასელი გოჩა არაა ფრიადოსანი
ყველა მარტივი რიცხვი კენტია	2 მარტივია და ლუწი
ნებისმიერი მთელი რიცხვის კვადრატი დადებითია	$0^2=0$
ნებისმიერი შედგენილი რიცხვი ლუწია	15 შედგენილია და კენტი

განვიხილოთ „ან“ და „და“ კავშირებით ნაწარმოები გამონათქვამები:

ა) „მე წავალ კინოში ან წავალ თეატრში“;

ბ) „მე წავალ კინოში და წავალ თეატრში“.

იმისათვის, რომ ა) გამონათქვამი არ განხორციელდეს, ანუ იყოს უარყოფილი, არ უნდა წავიდე არც კინოში და არც თეატრში. ე.ი. ა) გამონათქვამის უარყოფაა „არ წავალ კინოში და არ წავალ თეატრში“.

იმისათვის, რომ ბ) გამონათქვამი არ განხორციელდეს, ანუ იყოს უარყოფილი, საკმარისია არ წავიდე ერთგან მაინც, ანუ არ წავიდე კინოში ან არ წავიდე თეატრში. ე.ი. ბ) გამონათქვამის უარყოფაა „არ წავალ კინოში ან არ წავალ თეატრში“.

ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B};\quad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$

ამ ფორმულების დასამტკიცებლად საკმარისია შევადგინოთ და შევადაროთ შესაბამისი ჭეშმარიტების ცხრილები (შეადგინე დამოუკიდებლად).

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ გამონათქვამს $A \Rightarrow B$ გამონათქვამის **მოპირდაპირე გამონათქვამი** ეწოდება. ჭეშმარიტების ცხრილების საშუალებით მტკიცდება შემდეგი ფორმულა:

$$\left(\overline{A} \Rightarrow \overline{B}\right) = \left(B \Rightarrow A\right).$$

სიტყვიერად ეს ფორმულა ასე ყალიბდება: პირობითი გამონათქვამის მოპირდაპირე გამონათქვამი მისი შებრუნებულის ტოლფასია.

თუ ამ ფორმულაში პირობას და დასკვნას ადგილებს შევუცვლით მივიღებთ:

$$\left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right) = \left(A \Rightarrow B\right).$$

ანუ, პირობითი გამონათქვამი მისი შებრუნებულის მოპირდაპირე გამონათქვამის ტოლფასია.

მაგალითად, გამონათქვამის:

„თუ პარალელოგრამში დიაგონალები ტოლია, მაშინ პარალელოგრამი მართკუთხედია“ ტოლფასი გამონათქვამია:

„თუ პარალელოგრამი მართკუთხედი არაა, მაშინ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლი არაა“.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა შემთხვევაშია მოცემული გამონათქვამის უარყოფა ჭეშმარიტი? მცდარი?
2. რის ტოლია ორი გამონათქვამის ჯამის უარყოფა? ნამრავლის უარყოფა?
3. რა არის მოპირდაპირე პირობითი გამონათქვამი?
4. რისი ტოლფასია მოპირდაპირე გამონათქვამის შებრუნებული?

სავარჯიშოები

1 შეადგინე გამონათქვამის უარყოფის ჭეშმარიტების ცხრილი.

2 ჩამოაყალიბე მოცემულის საწინააღმდეგო გამონათქვამი:
ა) ბეღურა ფრინველია; ბ) ქეთინო ფრიადოსანია;
გ) ბათუმი საქართველოს დედაქალაქია; დ) 9 ჯერადია 18-ის;
ე) დღეს კინოში მივდივარ.

3 მოცემული გამონათქვამისთვის შეადგინე მისი უარყოფა. დაადგინე მათგან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი:
ა) 57 მარტივი რიცხვია;
ბ) 13-ს მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს;
გ) 105 უნაშთოდ იყოფა 7-ზე;
დ) არ არსებობს 7 სმ, 8 სმ და15 სმ გვერდების მქონე სამკუთხედი;
ე) არ არსებობს მრავალკუთხედი, რომლის შიგა კუთხეების ჯამი 1440°-ის ტოლია.

4 მოცემულია ორი გამონათქვამი:
A : სამკუთხედი ტოლფერდაა; B: სამკუთხედი მართკუთხაა.
დაასაბუთე, რომ B გამონათქვამი არ არის A გამონათქვამის უარყოფა;

5 დაასაბუთე გამონათქვამის მცდარობა კონტრმაგალითის მოყვანით:
ა) ყოველი ნატურალური რიცხვი მარტივია ან შედგენილი;
ბ) ყოველი შედგენილი ნატურალური რიცხვი იყოფა 2-ზე ან 3-ზე;
გ) ყველა რიცხვი რაციონალურია;
დ) ნებისმიერ მართკუთხედში ჩაიხაზება წრე.

6 შეადგინე მოცემული გამონათქვამის უარყოფა:
ა) ყოველი რიცხვი რაციონალურია ან ირაციონალური;
ბ) ყოველი კვადრატი რომბია და მართკუთხედია;
გ) ყველა სპორტსმენი სწრაფია და მოქნილი;
დ) ყველა ფრინველს შეუძლია ცურვა ან ფრენა.

7 დაასაბუთე, რომ ნებისმიერი A გამონათქვამისთვის $A \cdot \overline{A}$ მცდარი, ხოლო $A + \overline{A}$ ჭეშმარიტი გამონათქვამი.

8 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისთვის $A \Rightarrow B$ პირობითი გამონათქვამი $\overline{A} \vee B$ გამონათქვამის ტოლფასია.

9 დაასაბუთე, რომ ნებისმიერი A და B გამონათქვამებისთვის ჭეშმარიტია $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ გამონათქვამი;

10 მოცემულია ცვლადიანი გამონათქვამი: „ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის n^2+5n+1 ლუწი რიცხვია“. შეადგინე ამ გამონათქვამის უარყოფა და დაადგინე რომელი მათგანია ჭეშმარიტი.

1.4 გამონათქვამები მათემატიკაში

მიზანი

მათემატიკური გამონათქვამების დახასიათება; თეორემის დამტკიცების მეთოდების განხილვა.

მათემატიკაში ძირითადად სამი სახის გამონათქვამი გვხვდება: **განმარტება**, **აქსიომა** და **თეორემა.** ეს გამონათქვამები მათემატიკური ცნებების თვისებებსა და ამ ცნებებს შორის კავშირებს აყალიბებს.

განმარტება ისეთი გამონათქვამია, რომლის მეშვეობით ამა თუ იმ ცნების შინაარსი გადმოიცემა. განმარტება ადრე განმარტებულ ან განმარტების გარეშე მიღებულ ე.წ. საწყის ცნებებს იყენებს. მისი საშუალებით ახალი ცნების სახელდება ხდება. ამიტომ მისი ჭეშმარიტება დამტკიცებას არ საჭიროებს.

მაგალითად, განვიხილოთ წრეწირის მხების განმარტება:

„წრფეს, რომელსაც წრეწირთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს, წრეწირის მხები ეწოდება"

მოცემულ განმარტებაში ნახსენები წრფე და წერტილი გეომეტრიის საწყისი ცნებებია, ხოლო წრეწირი მანამდე განმარტებული ცნებაა, რომლის განმარტებაში, თავის მხრივ, წერტილის, სიბრტყის, სიმრავლის და მანძილის საწყისი ცნებები გამოიყენება (გაიხსენე ეს განმარტება).

აქსიომა დაუმტკიცებლად ჭეშმარიტად მიჩნეული გამონათქვამია, რომლის მეშვეობით საწყისი ცნებების თვისებები და მათ შორის კავშირები გადმოიცემა.

მაგალითად, აქსიომა:

„ორ წერტილზე გაივლება წრფე და ამასთან მხოლოდ ერთი"

ორ წერტილსა და წრფეს შორის მიმართებას ამყარებს. ამ აქსიომის შედეგია, რომ წრფე შეგვიძლია ორი ასოთი აღვნიშნოთ: AB წრფე, სწორედ ის ერთადერთი წრფეა, რომელიც A და B წერტილზე გაივლება.

თეორემა, პირობითი გამონათქვამია, რომლის ჭეშმარიტება დამტკიცებას საჭიროებს.

როგორც ყველა პირობითი გამონათქვამი, თეორემა ორი ნაწილისგან, პირობისა და დასკვნისაგან შედგება. თეორემის დამტკიცება პირობის ჭეშმარიტებიდან დასკვნის ჭეშმარიტების გამოყვანას გულისხმობს. ამის მისაღწევად აქსიომებს, უკვე დამტკიცებულ თეორემებსა და ლოგიკის კანონებზე დამყარებულ მსჯელობას ვიყენებთ.

განვიხილოთ ორი მაგალითი:

თეორემა 1. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია.

ეს თეორემა ერთი შეხედვით პირობითი გამონათქვამის სახით არაა ჩამოყალიბებული, მაგრამ ცხადია, პირობაა რომ ობიექტი, რომელზეც არის საუბარი – პარალელოგრამია, ხოლო დასკვნა მისი მოპირდაპირე გვერდების ტოლობაა. ამიტომ, ამ თეორემის პირობითი გამონათქვამის სახით ჩამოყალიბება შემდეგნაირად შეგვიძლია:

„თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია"

ასე ჩამოყალიბებულ თეორემაში პირობაა გამონათქვამი:

P: „ოთხკუთხედი პარალელოგრამია",

ხოლო დასკვნა:

Q: „ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია“

ჩამოვთვალოთ ამ თეორემის დამტკიცების საფეხურები:

1. ვთქვათ, ABCD ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (პირობის ჭეშმარიტების დაშვება);
2. AB||CD, AD||BC (პარალელოგრამის განმარტება).
3. $\angle BAC=\angle ACD$, $\angle ACB=\angle CAD$, (თეორემა ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთით მიღებული შიგა ჯვარედინი კუთხეების ტოლობის შესახებ);
4. $\Delta ABC=\Delta CDA$ (სამკუთხედების ტოლობის ნიშანი გვერდითა და მასთან მდებარე ორი კუთხით);
5. AD=BC და AB=CD (თეორემა ტოლ სამკუთხედებში შესაბამისი გვერდების ტოლობის შესახებ.)

ჩატარებული მსჯელობით თეორემა დამტკიცებულია, რადგან დაშვებიდან, რომ P ჭეშმარიტი გამონათქვამია, გამოვიყვანეთ Q გამონათქვამის ჭეშმარიტება, რაც, როგორც 1.1 პარაგრაფიდან ვიცით, $P\Rightarrow Q$ პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტებას ნიშნავს.

ლოგიკური ჯაჭვი, რომელიც ამ დამტკიცებაშია გამოყენებული ასე გამოიყურება:

$$1\Rightarrow2\Rightarrow3\Rightarrow4\Rightarrow5$$

დამტკიცების განხილულ მეთოთს **დედუქციური მეთოდი** ეწოდება. ამავე მეთოდით მტკიცდება მოცემული თეორემის **შებრუნებული თეორემა**, რომელიც მოცემული $P\Rightarrow Q$ პირობითი გამონათქვამის შებრუნებული $Q\Rightarrow P$ გამონათქვამია (დაამტკიცე დამოუკიდებლად.)

თეორემა 2. ორი განსხვავებული წრფე არაუმეტეს ერთ წერტილში იკვეთება.

პირველ რიგში თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით ჩამოვაყალიბოთ:

„თუ ორი წრფე განსხვავებულია, მაშინ წრფეთა საერთო წერტილების რაოდენობა 1-ს არ აღემატება.“

ასე ჩამოყალიბებულ თეორემაში პირობაა:

P: ორი წრფე განსხვავებულია;

ხოლო დასკვნა:

Q: წრფეების საერთო წერტილთა რაოდენობა 1-ს არ აღემატება.

თეორემის, ანუ $P\Rightarrow Q$ გამონათქვამის დამტკიცების მაგივრად შეგვიძლია დავამტკიცოთ შებრუნებულის მოპირდაპირე $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ გამონათქვამი, რომელიც, როგორც ვიცით, მოცემული გამონათქვამის ტოლფასია. ჩამოვაყალიბოთ ეს გამონათქვამი:

„თუ წრფეების საერთო წერტილთა რაოდენობა 1-ს აღემატება, მაშინ ეს წრფეები განსხვავებული არაა.“

დამტკიცება უშუალოდ ზემოთ ჩამოყალიბებული აქსიომიდან გამომდინარეობს, რადგან, თუ წერტილთა რაოდენობა ორი მაინცაა, ამ წერტილებზე ერთადერთი წრფე გაივლება.

დამტკიცების განხილულ მეთოდს **საწიააღმდეგოს დაშვების მეთოდი** ეწოდება.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა სახის გამონათქვამები გვხვდება მათემატიკაში?
2. რატომ არ სჭირდება განმარტებას დამტკიცება?
3. რა არის თეორემა?
4. რაში მდგომარეობს თეორემის დამტკიცების დედუქციური მეთოდი?
5. ლოგიკის რომელ ფორმულას ეფუძნება დამტკიცების საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი?

სავარჯიშოები

1 ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით და გაარკვიე, რომელი მათგანის შებრუნებული გამონათქვამია ჭეშმარიტი.
ა) ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360 გრადუსის ტოლია;
ბ) 7-ის ჯერადი რიცხვების ჯამი 7-ის ჯერადია;
გ) ტოლფერდა ტრაპეციაში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია;
დ) ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის მედიანა სიმაღლეს წარმოადგენს.

2 მოცემულია თეორემა:
„პარალელოგრამში მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია."
ა) ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით;
ბ) ჩამოაყალიბე შებრუნებული თეორემა;
გ) დაამტკიცე ჩამოყალიბებული თეორემები;
დ) გააერთიანე ჩამოყალიბებული თეორემები ტოლფასობის სახით.

3 მოცემულია თეორემა: „პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი თითოეულ დიაგონალს ორ ტოლ ნაწილად ყოფს."
ა) ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემა პირობითი გამონათქვამის სახით;
ბ) ჩამოაყალიბე მოცემულის შებრუნებული თეორემა;
გ) დაამტკიცე ჩამოყალიბებული თეორემები;
დ) გააერთიანე ჩამოყალიბებული თეორემები ტოლფასობის სახით.

4 მოცემულია თეორემა: „ტოლი გვერდების მქონე მართკუთხედებს ტოლი დიაგონალები აქვთ." დაამტკიცე მოცემული თეორემა;
ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემის შებრუნებული გამონათქვამი და გაარკვიე მისი მართებულობის საკითხი.

5 მოცემულია გამონათქვამი: „კვადრატის დიაგონალები ტოლი და ურთიერთმართობულია." დაამტკიცე მოცემული თეორემა;
ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემის შებრუნებული გამონათქვამი და გაარკვიე მისი მართებულობის საკითხი;
გ) ჩამოაყალიბე მოცემული თეორემის შებრუნებულის საპირისპირო თეორემა.

6 დაამტკიცე მოცემული თეორემა საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით:
ა) თუ n^2 კენტი რიცხვია, მაშინ n კენტი რიცხვია;
ბ) თუ რიცხვი n არ იყოფა 15-ზე, მაშინ n არ იყოფა 3-ზე ან 5-ზე;
გ) თუ n და p 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვებია და ამასთან, p არის n-ის გამყოფებს შორის უმცირესი, მაშინ p მარტივი რიცხვია.

7 მოცემულია თეორემა: თუ სამკუთხედის მედიანით გვერდი ამავე მედიანის ტოლ ნაწილებად გაიყო, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.
ა) დაამტკიცე მოცემული თეორემა;
ბ) ჩამოაყალიბე და დაამტკიცე მოცემული თეორემის შებრუნებული თეორემა;
გ) გააერთიანე მოცემული თეორემები ერთ თეორემად ტოლფასობის სახით.

8 საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დაამტკიცე თეორემა:
„მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა."

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №1

1 ვთქვათ, A და B ჭეშმარიტი გამონათქვამებია. შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელი იქნება მცდარი?

ა) $A \wedge B$; ბ) $A \vee B$; გ) $\overline{A} \Rightarrow B$; დ) $B \Rightarrow \overline{A}$.

2 მოცემული გამონათქვამებიდან რომელია $A \Rightarrow B$ გამონათქვამის ტოლფასი?

ა) $A \vee B$; ბ) $A \wedge B$; გ) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$; დ) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

3 მოცემულია გამონათქვამი: „თუ m და n ნატურალური 7-ის ჯერადი რიცხვებია, მაშინ m+n ჯამი 7-ის ჯერადი რიცხვია". შემდეგი გამონათქვამებიდან, რომელია მოცემული გამონათქვამის ტოლფასი?

ა) თუ m ან n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი;

ბ) თუ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ m ან n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი;

გ) თუ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი, მაშინ m და n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვები;

დ) თუ m და n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვები, მაშინ m+n არაა 7-ის ჯერადი რიცხვი;

4 მოცემულია გამონათქვამი: „ლიმონი მრგვალია და ყვითელი". შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია ამ გამონათქვამის უარყოფა?

ა) ლიმონი მრგვალი არაა ან ყვითელი არაა;

ბ) ლიმონი ზოგჯერ ნარინჯის ფერია;

გ) ლიმონი არც მრგვალია და არც ყვითელი;

დ) თუ მრგვალია და ყვითელია, მაშინ ლიმონია.

5 მოცემულია გამონათქვამი: „თუ ოთხკუთხედი რომბიცაა და მართკუთხედიც, მაშინ ოთხკუთხედი კვადრატია". შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია ამ გამონათქვამის ტოლფასი:

ა) თუ ოთხკუთხედი არც რომბია და არც კვადრატი, მაშინ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა;

ბ) თუ ოთხკუთხედი არაა კვადრატი, მაშინ ოთხკუთხედი არც რომბია და არც მართკუთხედი;

გ) თუ ოთხკუთხედი არაა კვადრატი, მაშინ ოთხკუთხედი რომბი არაა ან მართკუთხედი არაა;

დ) კვადრატი ან რომბი არაა, ან მართკუთხედი არაა.

6 მოცემულია გამონათქვამი: „თუ ნატურალური რიცხვის კვადრატის ბოლო ციფრია 1, მაშინ ამ რიცხვის ბოლო ციფრიც არის 1". შემდეგი ტოლობებიდან, რომელია მოცემული გამონათქვამის კონტრმაგალითი?

ა) 12=1; ბ) 112=121; გ) 132=169; დ) 92=81.

7 შეადგინე ორი გამონათქვამის ჯამის (დიზიუნქციის) ჭეშმარიტების ცხრილი.

8 შეადგინე პირობითი გამონათქვამის (იმპლიკაციის) ჭეშმარიტების ცხრილი.

9 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი A გამონათქვამისათვის მცდარია გამონათქვამი: $A \vee \overline{A} \Rightarrow A \wedge \overline{A}$.

10 მოცემულია ორი პირობითი გამონათქვამი:

A: თუ მირიანი ფეხბურთელია, მაშინ გიორგიც ფეხბურთელია;

B: თუ შიო ფეხბურთელია, მაშინ გიორგიც ფეხბურთელია.

დაადგინე, რომელია ფეხბურთელი თუ ცნობილია, რომ A მცდარი და B ჭეშმარიტი გამონათქვამია.

თავი 2. ნამდვილი რიცხვები

ამ თავში გაიმეორებ:

- რაციონალური რიცხვის ჩაწერის სხვადასხვა ფორმას;
- წილადის პერიოდულ ათწილადად წარმოდგენას და პერიოდული ათწილადის ჩაწერას წილადის სახით;
- ათწილადის თანრიგობრივ შესაკრებთა ჯამად წარმოდგენას;
- ირაციონალური რიცხვის, როგორც არაპერიოდული ათწილადის სტრუქტურას;
- ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვით მოცემული სიზუსტით მიახლოებას;
- ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს, როგორც უსასრულო პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადების ერთობლიობას;
- მოქმედებების შესრულებას ნამდვილ რიცხვებზე.

ამ თავში გაეცნობი:

- პერიოდულ მოვლენებს;
- პერიოდული ფუნქციის ცნებას;
- პერიოდული ფუნქცის გრაფიკს.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- რაციონალი რიცხვების სხვადასხვა ფორმით ჩაწერას;
- პერიოდული ათწილადის წილადის სახით წარმოდგენას;
- ირაციონალური რიცხვების ამოცნობას;
- კალკულატორის გამოყენებას ირაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების მოცემული სიზუსტით გამოსათვლელად;
- პერიოდული ფუნქციის ამოცნობას;
- პერიოდული ფუნქციის პერიოდის დადგენას;
- პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის აგებას.

გუსტავ პეტერ დირიხლე
1805-1859 წ.
გერმანელი მათემატიკოსი, თანამედროვე რიცხვთა თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი

კომპლექსური დავალება
„განმეორებადი მოვლენები და პერიოდული ფუნქციები“

ზოგიერთი ბუნებრივი მოვლენა გარკვეული პერიოდულობით მეორდება. მაგალითად, ყოველ გაზაფხულზე მინდორი ყვავილებითა და ბალახით იმოსება, შემოდგომაზე ხეებს ფოთოლი სცვივა, ზამთარში მთის მწვერვალები თოვლით იფარება და ა.შ.

ასეთ მოვლენებს პერიოდულ მოვლენებს უწოდებენ.

პერიოდული მოვლენის უამრავი მაგალითია ცნობილი მეცნიერების სხვადასხვა დარგში: ასტრონომიაში – პლანეტების მოძრაობა, ქიმიაში – ელემენტთა პერიოდული სისტემა, კარდეოლოგიაში – გულის ცემა და სხვ.

პერიოდულია ადამიანთა საქმიანობის თითქმის ყველა სფერო: ფერმერები შემოდგომობით იღებენ მოსავალს, მოსწავლეები შაბათ-კვირას ისვენებენ, რედაქციები პერიოდულ ჟურნალ-გაზეთებს გამოსცემენ და ა.შ.

პერიოდულობა გამოიყენება მუსიკალურ ნაწარმოებებში, არქიტექტურისა და სახვითი ხელოვნების ნიმუშებში და სხვ.

მოვლენათა პერიოდულობის ცოდნა საშუალებას იძლევა წინასწარ განვჭვრიტოთ და მომზადებული შევხვდეთ ამა თუ იმ მოვლენას.

პერიოდული თვისების მქონე ობიექტები გვხვდება მათემატიკაშიც. ასეთია, მაგალითად, უსასრულო პერიოდული ათწილადი, რომელიც წილადის ათწილადად ჩაწერის დროს წარმოიშვება.

პერიოდული მოვლენების შესასწავლად მათემატიკაში პერიოდული ფუნქციები გამოიყენება. მათი საშუალებით სხვადასხვა პერიოდული მოვლენა აღიწერება.

შენი დავალება:

1. ისტის, სასკოლო სახელმძღვანელოებისა და სხვადასხვა სამეცნიერო ლიტერატურის საშუალებით მოიძიე, აღწერე და დაახასიათე ბუნების, მეცნიერებისა და ადამიანის საქმიანობის პერიოდულობის თვისების მატარებელი სხვადასხვა მაგალითი.

ფიროსმანი „რთველი“

2. მოიძიე და შეისწავლე მათემატიკაში არსებული პერიოდული თვისების მქონე პროცესები (მაგალითად, რიცხვის ნატურალური ხარისხის ბოლო ციფრთა მიმდევრობა, ნაშთიანი გაყოფისას წარმოქმნილი პერიოდული ათწილადი, პერიოდული ფუნქციები).

3. მოიძიე ან/და თვითონ შეადგინე პერიოდულ ფუნქციათა მაგალითები. ჩამოაყალიბე და დაასაბუთე მათი თვისებები და ააგე მათი გრაფიკები.

მაგალითად, გაიხსენე ან მოიძიე რიცხვის წილადი ნაწილის განმარტება, დაამტკიცე, რომ შესაბამისი ფუნქციის პერიოდი 1-ის ტოლია და ააგე მისი გრაფიკი.

4. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- მეცნიერებისა და ხელოვნების რა სფეროებიდან მოიძიე პერიოდული მოვლენების მაგალითები;
- რომელი სფეროს მაგალითები აღმოჩნდა შენთვის ახალი და საინტერესო;
- რომელი პერიოდული ფუნქციები შეისწავლე და როგორ გამოიყენე პერიოდულობის თვისება გრაფიკის ასაგებად;
- რომელი გარდაქმნა გამოიყენე პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად;
- სასკოლო სახელმძღვანელოს გარდა კიდევ რა ლიტერატურა დაგჭირდა დავალების შესასრულებლად;
- რა ტექნიკური საშუალებები და საძიებო სისტემები გამოიყენე საჭირო მასალის შესაგროვებლად.

ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და ვიზუალური მასალა.

2.1 რაციონალური რიცხვები

მიზანი

რაციონალური რიცხვების ჩაწერის სხვადასხვა ფორმის განხილვა და გამოყენება

საგანთა, ობიექტთა ერთი და იმავე რაოდენობის გამოსახვა სხვადასხვა სახის ჩანაწერითაა შესაძლებელი. მაგალითად, თუ 9 ვაშლი 4-მა მეგობარმა თანაბრად უნდა გაინაწილოს, მაშინ გასაგებია, რომ თითოეულს ამ ცხრა ვაშლის მეოთხედი, ანუ $\frac{9}{4}$ ვაშლი შეხვდება. ვაშლების იმავე რაოდენობას მივიღებთ, თუ მეგობრებს ჯერ 2-2 ვაშლს, ხოლო შემდეგ დარჩენილი ვაშლის მეოთხედებს ჩამოვურიგებთ. ამ შემთხვევაში თითოეულ მეგობარს $2\frac{1}{4}$, ანუ, რაც იგივეა, 2,25 ვაშლი შეხვდება. თუ ვაშლების იმავე რაოდენობას პროცენტის სახით ჩავწერთ, მივიღებთ: $\left(\frac{9}{4}\cdot 100\right)\%=225\%$.

განხილული მაგალითიდან ვასკვნით: $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}=2,25=225\%$.

მიღებულ ტოლობებში:

$\frac{9}{4}$ **ჩვეულებრივი წილადის** სახით ჩაწერილი რიცხვია;

$2\frac{1}{4}$ არის $\frac{9}{4}$-ის მთელი ნაწილის გამოყოფით მიღებული **შერეული** სახით ჩაწერილი რიცხვი;

2,25 არის $\frac{9}{4}$-ის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით მიღებული **ათწილადის** სახით ჩაწერილი რიცხვი;

225% არის $\frac{9}{4}$-ის 100-ზე გამრავლებით მიღებული პროცენტის სახით ჩაწერილი რიცხვი.

გავიხსენოთ, რომ ყველა იმ რიცხვს, რომლის $\frac{m}{n}$ წილადის სახით ჩაწერაა შესაძლებელი, სადაც m მთელი, ხოლო n ნატურალური რიცხვია, **რაციონალური რიცხვი** ეწოდება. რაციონალურია:

ა) ნებისმიერი მთელი რიცხვი, მაგალითად, -7, რადგან $-7=\frac{-7}{1}$;

ბ) ნებისმიერი შერეული რიცხვი, მაგალითად, $5\frac{3}{8}$, რადგან $5\frac{3}{11}=\frac{5\cdot 11+3}{11}=\frac{58}{11}$;;

გ) ნებისმიერი სასრული ათწილადი, მაგალითად 3,415, რადგან $3,415=\frac{3415}{1000}$.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ლათინური მთავრული Q ასოთი აღნიშნავენ. განმარტების თანახმად,

$$Q=\left\{\frac{m}{n}: m\in Z, n\in N\right\}$$

სადაც Z-ით **მთელ რიცხვთა სიმრავლე,** ხოლო N-ით **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა** აღნიშნული.

რაციონალური რიცხვთა სიმრავლის მნიშვნელოვანი ქვესიმრავლეა ისეთი რაციონალური რიცხვები, რომელთა მნიშვნელი 10-ის ნატურალური ხარისხია. ასეთი რიცხვებისთვის ათწილად ჩანაწერს ვიყენებთ. მაგალითად:

$$\frac{13}{10}=1,3; \quad -\frac{2457}{100}=-24,57; \quad \frac{401}{1000}=0,401.$$

ათწილადის სახით ჩაწერილი დადებითი რიცხვის ზოგადი სახეა:

$$a_1a_2...a_n,\ b_1b_2...b_k \qquad (1)$$

სადაც მძიმის მარცხნივ მდგომი $a_1a_2...a_n$ ციფრების მიმდევრობა გამოსახავს რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო მძიმის მარჯვნივ მდგომი $b_1b_2...b_k$ ციფრების მიმდევრობა – წილად ნაწილს.

თუ (1) სახით მოცემულ ათწილადს თანრიგობრივი შესაკრებების ჯამად წარმოვადგენთ, მივიღებთ:

$$a_1a_2\ldots a_n,b_1b_2\ldots b_k=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_n\cdot 10^0+b_1\cdot 10^{-1}+b_2\cdot 10^{-2}+\ldots+b_k\cdot 10^{-k} \quad (2)$$

1-ელი სახის რიცხვს **სასრული ათწილადი** ეწოდება.

იმისათვის, რომ წილადის სახით ჩაწერილი რიცხვი ათწილადის სახით ჩავწეროთ, მრიცხველი უნდა გავყოთ მნიშვნელზე. მაგალითად,

$$\frac{2}{5}=2:5=0,4; \quad \frac{15}{4}=15:4=3,75.$$

მაგალითი 1. წარმოვადგინოთ თანრიგობრივი შესაკრებების ჯამის სახით $\frac{1223}{40}$.

ამოხსნა. მოცემული წილადი ჯერ ჩავწეროთ ათწილადის სახით, რისთვისაც საკმარისია შევასრულოთ 1223-ის 40-ზე გაყოფა. თუმცა, მოცემულ შემთხვევაში, უმჯობესია, ჯერ გამოვყოთ მთელი ნაწილი 30, ხოლო წილადი ნაწილის მნიშვნელი და მრიცხველი გავამრავლოთ 25-ზე. მივიღებთ:

$$\frac{1223}{40}=30\frac{23}{40}=30\frac{575}{1000}=30,575=3\cdot 10+0\cdot 10^0+5\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}.$$

ისეთი წილადი, რომლის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული მარტივი მამრავლი არ მონაწილეობს, სასრული ათწილადის სახით ჩაიწერება.

მართლაც, თუ წილადი $\frac{m}{2^{k_1}\cdot 5^{k_2}}$ სახისაა, სადაც k_1 და k_2 მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, მრიცხველისა და მნიშვნელის $2^{k_2}\cdot 5^{k_1}$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$\frac{m}{2^{k_1}\cdot 5^{k_2}}=\frac{m\cdot 2^{k_2}\cdot 5^{k_1}}{2^{k_1+k_2}\cdot 5^{k_2+k_1}}=\frac{m\cdot 2^{k_2}\cdot 5^{k_1}}{10^{k_1+k_2}}.$$

თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელის მარტივ მამრავლებად დაშლაში 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული ერთი მარტივი მამრავლი მაინც მონაწილეობს, მაშინ ასეთ წილადს სასრულ ათწილადად ვერ ჩავწერთ, რადგან ასეთი წილადის მნიშვნელი 10-ის მთელი ხარისხის სახით არ ჩაიწერება. ამ შემთხვევაში, მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება. მაგალითად,

$$\frac{1}{3}=0,333...=0,(3); \quad \frac{13}{6}=2,1666...=2,1(6).$$

მიღებული 0,(3) და 2,1(6) ჩანაწერები, შესაბამისად, რაციონალური რიცხვების $\frac{1}{3}$-ისა და $\frac{13}{6}$-ის **პერიოდული ათწილადი** ჩანაწერებია.

პერიოდული ათწილადის ზოგადი სახეა

$$a_1a_2...a_n,b_1b_2...b_k(c_1c_2...c_p) \qquad (2)$$

სადაც $a_1a_2...a_n$ მთელი ნაწილი, $b_1b_2...b_k$ პერიოდამდელი წილადი ნაწილი, ხოლო $c_1c_2...c_p$ პერიოდული ათწილადის ის ნაწილია, რომელიც უსასრულოდ მეორდება. ამ უკანასკნელ ნაწილს **პერიოდი**, ხოლო მასში ციფრთა რაოდენობას, ანუ p-ს, **პერიოდის სიგრძე** ეწოდება. მაგალითად, ჩანაწერში 12, 701(45), მთელი ნაწილია 12, პერიოდამდელი წილადი ნაწილი – 701, პერიოდი – 45, ხოლო პერიოდის სიგრძე – 2.

პერიოდულ ათწილადს, რომლის ჩანაწერში პერიოდი უშუალოდ მძიმის შემდეგ იწყება, **წმინდა პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. ასეთია, მაგალითად, 0,(3), 13,(25) და სხვ. ისეთ პერიოდულ ათწილადს, რომლის ჩანაწერში პერიოდამდელი წილადი ნაწილიც მონაწილეობს **შერეული პერიოდული ათწილადი** ეწოდება. მაგალითად, ასეთია 2,1(6).

შევნიშნოთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის პროცესში მიღებული ნაშთები შეიძლება იყოს 0, 1, . . . , n-1. გაყოფის რაიმე საფეხურზე ნულოვანი ნაშთის მიღების შემთხვევაში გაყოფის პროცესი დამთავრდება და მივიღებთ მოცემული წილადის სასრული ათწილადის სახის ჩანაწერს. (როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში მოხდება, თუ n-ს არ გააჩნია 2-ისა და 5-ისაგან განსხვავებული მარტივი გამყოფი.) სხვა შემთხვევაში, ყველაზე მეტი, n-1 საფეხურის შემდეგ რომელიმე არანულოვანი ნაშთი გამეორდება, რაც განაყოფის გამეორებას და პროცესის უსასრულო პერიოდულ გაგრძელებას გამოიწვევს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

ყოველი $\frac{m}{n}$ სახის წილადი სასრული ან პერიოდული ათწილადის სახით წარმოდგება.

მართებულია მოცემული თეორემის შებრუნებული თეორემაც:

როგორც სასრული ისე პერიოდული ათწილადი წილადის სახით წარმოდგება.

სასრული ათწილადის წილადად წარმოდგენის შესაძლებლობა მისი განმარტებიდან გამომდინარეობს. რაც შეეხება პერიოდულ ათწილადს, მისი წილადად ჩაწერის შესაძლებლობა გამომდინარეობს ფორმულიდან, რომელსაც დაუმტკიცებლად გთავაზობთ:

$$a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_k\left(c_1c_2 \dots c_p\right) = a_1a_2 \dots a_n \frac{b_1b_2 \dots b_kc_1c_2 \dots c_p - b_1b_2 \dots b_k}{\underbrace{99...9}_{p-ჯერ}\underbrace{00...0}_{k-ჯერ}}. \qquad (3)$$

მაგალითი 2. ჩავწეროთ წილადის სახით პერიოდული ათწილადი: ა) 0,(43) ; ბ) 26,153(17)

ამოხსნა. ა) 0,(43) პერიოდულ ათწილადს მთელი და პერიოდამდელი წილადი ნაწილი არ გვაქვს, ამიტომ მე-3 ფორმულიდან მივიღებთ ტოლობას: $0,(43) = \frac{43}{99}$;

ბ) ამ შემთხვევაში, მე-3 ფორმულის მიხედვით, k=3, ხოლო p=2. ამიტომ,

$$26,153(17) = 26\frac{15317-153}{99000} = 26\frac{15164}{99000}.$$

ჩამოყალიბებული პირდაპირი და შებრუნებული თეორემის გაერთიანებით მივიღებთ თეორემას:

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე სასრული და პერიოდული ათწილადების სიმრავლეთა გაერთიანებაა.

ეს თეორემა ნიშნავს, რომ რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია განვმარტოთ, როგორც რიცხვი, რომლის ჩაწერა შესაძლებელია სასრული ან პერიოდული ათწილადის სახით.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ რიცხვს ეწოდება რაციონალური?
2. არის თუ არა მთელი რიცხვი რაციონალური?
3. არის თუ არა შერეული რიცხვი რაციონალური?
4. როგორ წარმოადგენ შერეულ რიცხვს წილადის სახით?
5. როგორ ჩაწერ რიცხვს პროცენტის სახით?
6. რას ეწოდება ათწილადი?
7. არის თუ არა ათწილადების სიმრავლე წილადების ქვესიმრავლე?
8. რას გვიჩვენებს ათწილადის ჩანაწერში მძიმე?
9. რა შემთხვევაში მიიღება წილადის მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფისას ათწილადი? პერიოდული ათწილადი?
10. რა არის პერიოდული ათწილადის პერიოდი? პერიოდის სიგრძე?

სავარჯიშოები

1 ჩაწერე მოცემული მთელი რიცხვი 10-ის ტოლი მნიშვნელის მქონე წილადის სახით:

ა) 3; ბ) 13; გ) –21; დ) 10; ე) –100.

2 ჩაწერე მოცემული შერეული რიცხვი წილადის სახით:

ა) $3\frac{2}{5}$; ბ) $-1\frac{1}{2}$; გ) $-5\frac{4}{5}$; დ) $10\frac{7}{20}$; ე) $-13\frac{10}{11}$.

3 ჩაწერე პროცენტით მოცემული რიცხვი წილადის სახით:

ა) 50%; ბ) 25%; გ) 10%; დ) 29% ე) $\frac{1}{3}$%.

4 ჩაწერე ათწილადი წილადის სახით:

ა) 0,3; ბ) –1,4; გ) –0,21; დ) 10,458; ე) 123, 1234.

5 მოცემულთაგან რომელი რიცხვი არ ჩაიწერება სასრული ათწილადის სახით?

ა) 19; ბ) $1\frac{2}{5}$; გ) $-2\frac{3}{20}$; დ) $13\frac{12}{15}$; ე) $6\frac{50}{55}$.

6 ჩაწერე მოცემული რიცხვი ათწილადის სახით:

ა) $1\frac{3}{5}$; ბ) $2\frac{3}{50}$; გ) $-2\frac{7}{20}$; დ) $23\frac{14}{35}$; ე) $-\frac{165}{44}$.

7 წარმოადგინე მოცემული რიცხვი თანრიგობრივი შესაკრებების ჯამად:

ა) 123; ბ) 23,123; გ) 102,5061; დ) $\frac{7}{25}$; ე) $3\frac{13}{250}$.

8 ჩაწერე მოცემული რიცხვი პერიოდული ათწილადის სახით:

ა) $\frac{5}{6}$; ბ) $\frac{2}{9}$; გ) $-1\frac{4}{9}$; დ) $-3\frac{7}{12}$; ე) $\frac{22}{7}$.

9 ჩამოაყალიბე სიტყვიერად წმინდა პერიოდული ათწილადის წილადად ჩაწერის წესი.

10 ჩამოაყალიბე სიტყვიერად შერეული პერიოდული ათწილადის წილადად ჩაწერის წესი.

11 ჩაწერე მოცემული პერიოდული ათწილადი წილადის სახით:
ა) 0,(7); ბ) 0,(9); გ) –0,(18); დ) 10,(36); ე) –2,(24);
ვ) 0,1(5); ზ) 1,2(3); თ) 20,3(15); ი) 1,41(123); კ) 9,0(12).

12 იპოვე წილადი (0,5; 0,6) შუალედიდან, რომლის მნიშვნელი 20-ის ტოლია.

13 იპოვე 0,(7)-სა და 0,(8)-ს შორის მოთავსებული ყველა ის წილადი, რომლის მნიშვნელია 27.

14 დაამტკიცე, რომ ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი რაციონალური რიცხვია.

15 დაამტკიცე, რომ ორი რაციონალური რიცხვის ნამრავლი რაციონალური რიცხვია.

16 გამოსახე მიმართება ნატურალურ, მთელ და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეებს შორის ვენის დიაგრამით.

17 გამოსახე მიმართება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და სასრული ათწილადი რიცხვების სიმრავლეს შორის ვენის დიაგრამით.

18 დაამტკიცე ტოლობა: 4,(9)=5,(0).

19 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის უამრავი რაციონალური რიცხვია მოთავსებული.

20 დაამტკიცე, რომ $\frac{k^2-1}{24}$ -სახის წილადი ნატურალურ რიცხვს წარმოადგენს, სადაც k არის 3-ზე მეტი მარტივი რიცხვი.

2.2. ირაციონალური რიცხვები

მიზანი

ირაციონალური რიცხვისა და ნამდვილი რიცხვის განმარტება.
მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე.

თეორემა. $x^2=2$ განტოლებას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ აქვს.

დამტკიცება. თეორემა საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დავამტკიცოთ.

ვთქვათ, მოცემულ განტოლებას აქვს ამონახსნი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში და ეს ამო-ნახსნია $\frac{m}{n}$, სადაც m და n ნატურალური რიცხვებია. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, შეკვეცით მას უკვეცი წილადით ჩავანაცვლებთ. ამ ამონახსნის მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ $m^2=2n^2$ ტოლობას. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ m^2 ლუწი რიცხვია. ეს კი ნიშნავს, რომ m-იც ლუწი რიცხვია, ანუ $m=2k$, სადაც $k\in N$. თუ $m^2=2n^2$ ტოლობაში m-ის ნაცვლად $2k$-ს ჩავსვამთ, მივიღებთ: $4k^2=2n^2$, საიდანაც $n^2=2k^2$. უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ n^2 და მასთან ერთად n ლუწი რიცხვია. გამოდის, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი იკვეცება 2-ზე, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას უკვეცი რაციონალური ამონახსნის არსებობის შესახებ.

როგორც წინა კლასებიდან იცი, $x^2=2$ განტოლების დადებითი ამონახსნი $\sqrt{2}$-ით აღინიშნება. დამტკიცებული თეორემის თანახმად $\sqrt{2}$ არც სასრული და არც პერიოდული ათწილადის სახით არ ჩაიწერება.

მიუხედავად ამისა, $\sqrt{2}$-ის მნიშვნელობის გამოთვლა ნებისმიერი თანრიგის სიზუსტითაა შესაძლებელი. მაგალითად, მეათედის სიზუსტით გამოსათვლელად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ვისარგებლოთ $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{200}{100}}=\frac{\sqrt{200}}{10}$ ტოლობით. რადგან ერთეულის სიზუსტით $\sqrt{200}\approx 14$, მივიღებთ, რომ $\sqrt{2}\approx 1,4$ მეათედის სიზუსტით. ანალოგიურად ვიქცევით $\sqrt{2}$-ის მეასედის სიზუსტით გამოსათვლელად:

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{20000}{10000}}\approx\frac{141}{100}\approx 1,41$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ $\sqrt{2}$-ის მეათასედების, მეათიათასედების და ა.შ. თანრიგის ციფრებს. ამასთან, ეს პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება და მიღებული ჩანაწერი არ იქნება პერიოდული ათწილადი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვი აღმოჩნდება. ე.ი. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი გამოთვლის პროცესი უსასრულოდ გრძელდება და შედეგად უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი ჩანაწერი მიიღება. მაგალითად, კალკულატორის საშუალებით 10^{-31} თანრიგის სიზუსტით გამოთვლილი $\sqrt{2}$ ათწილადი ჩანაწერი ასე გამოიყურება:

1,4142135623730950488016887242097

განმარტება. უსასრულო არაპერიოდულ ათწილად რიცხვს **ირაციონალური რიცხვი** ეწოდება.

როგორც ჩატარებული მსჯელობით დავრწმუნდით, $\sqrt{2}$ ირაციონალური რიცხვია. ირაციონალირი რიცხვებია $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, π (წრეწირის სიგრძის მის დიამეტრთან შეფარდება) და სხვ.

დადებითი ირაციონალური რიცხვის ზოგადი სახეა:

$$a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_k \dots \qquad (1)$$

სადაც $a_1a_2 \dots a_n$ მთელი ნაწილი, ხოლო $b_1b_2 \dots b_n$ უსასრულო არაპერიოდული წილადი ნაწილია.

იმისათვის, რომ მივიღოთ 1-ელი სახის ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა 10^{-k} სიზუსტით, მის ჩანაწერს ჩამოვაცილოთ წილადი ნაწილის ყველა თანრიგის ერთეული, დაწყებული k+1-დან. მიღებული $r_k=a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_k \dots$ სასრული ათწილადი იქნება 10^{-k} სიზუსტით მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით. გასაგებია, რომ რაც უფრო დიდ k-ს ავიღებთ, მით უფრო მცირე იქნება განსხვავება მოცემულ ირაციონალურ რიცხვსა და სასრულ ათწილადს შორის. სასრული ათწილადი კი რაციონალური რიცხვია. ე.ი. რაციონალur რიცხვთა r_k მიმდევრობის წევრები k-ს ზრდასთან ერთად რაგინდ ახლოს აღმოჩნდებიან ირაციონალურ a რიცხვთან. ამ ფაქტს მათემატიკის ენაზე ასე აყალიბებენ: r_k მიმდევრობის ზღვარი a-ს ტოლია და წერენ:

$$r_k \to a \text{ ან } \lim_{k\to\infty} r_k = a.$$

დასკვნა. ნებისმიერი ირაციონალური a რიცხვისათვის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა, რომლისთვისაც $|a - r_k| < 10^{-k}$.

მაგალითად, $a = \sqrt{2}$ შემთხვევაში ასეთი მიმდევრობა იქნება:

1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 . . .

განმარტება. რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების სიმრავლეთა გაერთიანებას **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე** ეწოდება.

R=IUQ, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, I ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში განიმარტება ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და 0-ისგან განსხვავებულ რიცხვზე გაყოფა. ეს მოქმედებები რაციონალური რიცხვების შემთხვევაში იგივეა, რაც მოქმედებები წილადებზე. ირაციონალური რიცხვების შემთხვევაში კი – ხდება მათი რაციონალური მიახლოებითი მნიშვნელობებით ჩანაცვლება.

მაგალითად, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ჯამის გამოსათვლელად ვიღებთ შესაკრებთა მიახლოებითი მნიშვნელობების ჯამებისგან შედგენილ მიმდევრობებს:

1,4+1,7; 1,41+1,73; 1,414+1,732; 1,4142+1,7320; 1,41421+1,73205 . . .

მტკიცდება, რომ არსებობს ერთადერთი ირაციონალური რიცხვი, რომლისთვისაც ეს მიმდევრობა წარმოადგენს ზემოთ განხილული მიახლოებითი მნიშვნელობების r_k მიმდევრობას. სწორედ ამ რიცხვს ეწოდება $\sqrt{2}$ -ისა და $\sqrt{3}$ -ის ჯამი.

არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ინარჩუნებენ შენთვის კარგად ცნობილ ყველა იმ თვისებას, რაც მათ აქვთ რაციონალური რიცხვებისათვის.

იმის გამო, რომ სასრული ათწილადის მნიშვნელობა არ იცვლება, თუ მის ჩანაწერს მარჯვნივ ნულს მივუწერთ, შეგვიძლია, როგორც მთელი რიცხვები, ისე სასრული ათწილადები,

პერიოდული ათწილადის სახით ჩავწეროთ, პერიოდით 0.

მაგალითად,

$$7=7,(0); \qquad -2=-2,(0); \qquad 1,25=1,25(0).$$

ასე, რომ რაციონალური რიცხვების სიმრავლე შეგვიძლია განვმარტოთ როგორც პერიოდული ათწილადების სიმრავლე, ხოლო ნამდვლ რიცხვთა სიმრავლე – როგორც პერიოდული და არაპერიოდული ათწილადების სიმრავლეთა გაერთიანება.

უსასრულო ათწილადებს ისევე ვადარებთ, როგორც სასრულ ათწილადებს ვადარებდით. განვიხილოთ მაგალითი: დავადგინოთ, რომელია მეტი, $\frac{22}{7}$ თუ π.

მეასედამდე სიზუსტით, როგორც $\frac{22}{7}$, ისე π რიცხვი 3,14-ის ტოლია. ე.ი. მეასედის თანრიგი არაა საკმარისი მათ შესადარებლად. მათი მიახლოებითი მნიშვნელობის მეტი სიზუსტით დასადგენად გამოვიყენოთ კალკულატორი: $\frac{22}{7} \approx 3,142857$, ხოლო $\pi \approx 3,141592$. როგორც ვხედავთ, პირველი განსხვავება მეათასედის თანრიგშია და რადგან 2>1, ამიტომ $\frac{22}{7} > 3,14$.

როცა გამოთვლებს მეასედამდე სიზუსტით ვაწარმოებთ, π-რიცხვი შეგვიძლია $\frac{22}{7}$-ით ან 3,14-ით ჩავანაცვლოთ.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ რიცხვს ეწოდება ირაციონალური რიცხვი?
2. შეიძლება თუ არა მთელი რიცხვი იყოს ირაციონალური? სასრული ათწილადი?
3. ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: „ყოველი ნამდვილი რიცხვი ან რაციონალური რიცხვია ან ირაციონალური რიცხვი“?
4. როგორ დაადგენ კალკულატორით $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობას $\frac{1}{1000000}$-მდე სიზუსტით?
5. როგორ გამოთვლი ორი პერიოდული ათწილადის ჯამს?
6. როგორ შეადარებ ნამდვილ რიცხვებს?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე მეათედამდე სიზუსტით: ა) $\sqrt{5}$; ბ) $\sqrt{7}$.

2 კალკულატორის გამოყენებით გამოთვალე: ა) $\sqrt{8}$-ის, ბ) $\sqrt{11}$-ის, გ) $\sqrt{13}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა 10^{-4} სიზუსტით.

3 გამოთვალე $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ჯამის მოახლოებითი მნიშვნელობა მეათასედის სიზუსტით.

4 ქვემოთ მოცემულთაგან რომელ გამოსახულებათა მნიშვნელობაა ირაციონალური?

ა) $\sqrt{13}$; ბ) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; გ) $\sqrt{81}:\sqrt{4}$;

დ) $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$; ე) $2+\sqrt{3}$; ვ) $0,(4)+\sqrt{2}$.

5 დაამტკიცე, რომ:

ა) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ რაციონალური რიცხვია;

ბ) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ირაციონალური რიცხვია.

6 რომელია მეტი:

ა) $1\frac{3}{7}$ თუ $\sqrt{2}$? ბ) 10 თუ 3π? გ) 11თუ $3{,}5\pi$? დ) $\sqrt{2}$ თუ $\sqrt[5]{5}$?

7 იპოვე:

ა) 2-სა და 3-ს შორის მოთავსებული ირაციონალური რიცხვი;

ბ) $\sqrt{2}$ -სა და $\sqrt{3}$ -ს შორის მოთავსებული რაციონალური რიცხვი.

8 ორი კვადრატიდან ერთის გვერდი მეორის დიაგონალის ტოლია. რომელი კვადრატის ფართობია მეტი და რამდენჯერ?

9 გამოთვალე 1 მ გვერდის მქონე კვადრატის დიაგონალი 1მმ-ის სიზუსტით.

10 გამოთვალე წრეწირის რადიუსი 1 სმ-ის სიზუსტით, თუ წრეწირის სიგრძეა $3\frac{1}{7}$ მ.

11 დაამტკიცე, რომ:

ა) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ რაციონალური რიცხვია;

ბ) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ირაციონალური რიცხვია.

12 0-ის ტოლი მთელი ნაწილის მქონე უსასრულო ათწილადის წილადი ნაწილი $7^1, 7^2, \ldots, 7^n, \ldots$ მიმდევრობის წევრთა ერთეულის თანრიგის ციფრებია. რაციონალურია თუ ირაციონალური მიღებული რიცხვი? ჩაწერე ეს რიცხვი წილადის სახით.

13 დაამტკიცე, რომ კვადრატული ფესვი ნებისმიერი მარტივი რიცხვიდან ირაციონალური რიცხვია.

შესაძლებელია თუ არა

ა) ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს ირაციონალური?
ბ) ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი იყოს რაციონალური?

აბა სცადე!

დაამტკიცე, რომ თუ a ნატურალური რიცხვი არაა სრული კვადრატი, მაშინ $\sqrt{a}$ ირაციონალური რიცხვია.

2.3 პერიოდული ფუნქცია

მიზანი

პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრა და გრაფიკის აგება.

ამოცანა. გიგა ყოველ მე-3 დღეს დადის ცურვაზე, ლალი – ყოველ მე-4 დღეს.

1 ოქტომბერს გიგა და ლალი ერთად იყვნენ ცურვაზე. ოქტომბრის კიდევ რა რიცხვებში იქნებიან გიგა და ლალი ცურვაზე ერთად?

ამოხსნა. პირობის თანახმად გიგა ცურვაზე იქნება ოქტომბრის 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 და 31 რიცხვებში, ხოლო ლალი – 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 და 29 რიცხვებში. ამ ორ ჩამონათვალში საერთო დღეებია 1, 13 და 25. ე.ი. გიგა და ლალი ცურვაზე კიდევ ერთად 13 ოქტომბერსა და 25 ოქტომბერს იქნებიან.

პასუხი. 13 და 25 რიცხვებში.

მოვლენას, რომელიც დროის ერთი და იმავე ინტერვალის შემდეგ მეორდება, პერიოდული მოვლენა ეწოდება. პერიოდული მოვლენებია: დედამიწის მზის გარშემო ბრუნვა, მთვარის დედამიწის გარშემო ბრუნვა, დღე-ღამის მონაცვლეობა და სხვ.

განხილულ ამოცანაში გიგას ცურვაზე ყოფნა მეორდება ყოველ 3 დღეში, ლალის ყოფნა – ყოველ 4 დღეში. სხვა სიტყვებით, გიგას ცურვაზე ყოფნის პერიოდია 3 დღე, ლალის ყოფნა – 4 დღე, ხოლო ორივესი ერთად – 3-ისა და 4-ის საერთო ჯერადი, ანუ 12 დღე.

პერიოდულობის თვისება ზოგიერთ რიცხვით ფუნქციასაც ახასიათებს. მოვიყვანოთ ამ თვისების ზუსტი განმარტება:

***f* რიცხვით ფუნქციას ეწოდება პერიოდული** ფუნქცია T პერიოდით, თუ არსებობს ისეთი T არანულოვანი რიცხვი, რომ ყოველი x რიცხვისათვის f ფუნქციის განსაზღვრის არედან, სრულდება ორი პირობა:

1. $x+T$ და $x-T$ რიცხვები ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის არეს;
2. $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

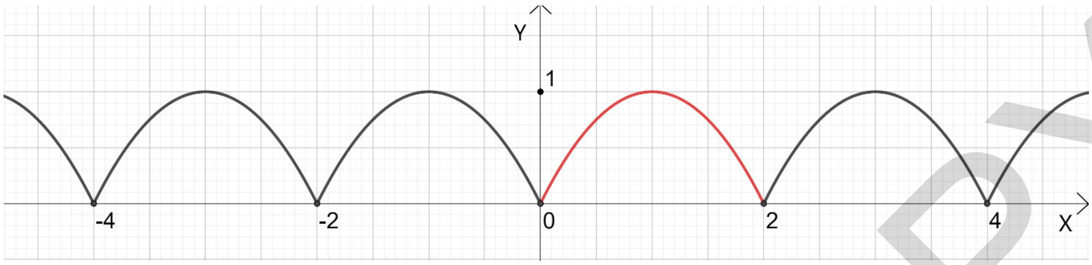
ადვილად შეგიძლია დარწმუნდე, რომ თუ T რიცხვი f ფუნქციის პერიოდია, მაშინ f ფუნქციის პერიოდი იქნება, აგრეთვე, T რიცხვის ნებისმიერი ჯერადი რიცხვი, ანუ kT სახის რიცხვი, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

პერიოდული ფუნქციის უმარტივესი მაგალითია მუდმივი ფუნქცია. ასეთი ფუნქციის პერიოდი იქნება ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი (ახსენი, რატომ.)

მთელ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული T პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია გრაფიკი ავაგოთ T სიგრძის რაიმე შუალედში, ხოლო შემდეგ ეს გრაფიკი $(kT;0)$, $k \in Z$, პარალელური გადატანებით გავავრცელოთ მთელ ღერძზე.

მაგალითი. ავაგოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 2-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც $[0;2]$ შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=2x-x^2$.

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ, [0;2] შუალედში f კვადრატული ფუნქციაა. ამიტომ ამ შუალედში მისი გრაფიკი იქნება პარაბოლას ნაწილი. ავაგოთ ეს ნაწილი და შემდეგ (±2;0) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანის მრავალჯერადი გამოყენებით გავავრცელოთ მთელ ღერძზე (იხილე ნახაზი).



უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება პერიოდილი ფუნქცია?
2. რას ეწოდება ფუნქციის პერიოდი?
3. რა პერიოდული ბუნებრივი მოვლენები იცი?
4. როგორ ააგებ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკს?

სავარჯიშოები

1 ორი მაღვიძარა საათიდან ერთი ყოველ 2 საათში, ხოლო მეორე – ყოველ 3 საათში რეკს. დილის 8 საათზე ორივე საათმა დარეკა. კიდევ რამდენჯერ დარეკავს ორივე საათი ერთდროულად მეორე დილის 7 საათამდე?

2 მაღვიძარა საათი ზარს ყოველ 5 საათში რეკს. საათმა დარეკა დილის 6 საათზე. რამდენი დღის შემდეგ დარეკავს საათი ისევ დილის 6 საათზე?

3 f პერიოდული ფუნქციაა 1-ის ტოლი პერიოდით. ამასთან, $f(-0,3)=9$. იპოვე:
ა) $f(-2,3)$; ბ) $f(3,7)$.

4 f და g ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული პერიოდული ფუნქციებია. f ფუნქციის პერიოდია 3, g ფუნქციის პერიოდი – 5. ამასთან, $f(0)+g(0)=-3$. იპოვე:
ა) $f(3)+g(5)$; ბ) $f(-6)+g(-10)$; გ) $f(15)+g(15)$.

5 f და g ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული პერიოდული ფუნქციებია. f ფუნქციის პერიოდია 4, g ფუნქციის პერიოდი – 5. რა პერიოდი აქვს f+g ფუნქციას?

6 ააგე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 1-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც [0;1] შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=x-x^2$.

7 ააგე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 4-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც $[-2; 2]$ შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=f(x)=2-|x|$.

8 ვთქვათ, f ფუნქციის პერიოდებია T_1 და T_2 დადებითი რიცხვები. იქნება თუ არა (T_1+T_2) რიცხვი ამავე ფუნქციის პერიოდი?

9 დაამტკიცე, რომ $f(x)=2x$ ფუნქცია არაა პერიოდული.

10 მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია მოცემულია ტოლობით:

$$f(m)=\begin{cases}1, & \text{თუ } |m| \text{ კენტია,}\\ 2, & \text{თუ } |m| \text{ ლუწია.}\end{cases}$$

დაამტკიცე, რომ f პერიოდული ფუნქციაა და იპოვე მისი უმცირესი დადებითი პერიოდი.

11 დირიხლეს ფუნქცია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე შემდეგი წესით განსაზღვრული ფუნქციაა:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ თუ } x \text{ რაციონალურია,}\\ 0, \text{ თუ } x \text{ ირაციონალურია.}\end{cases}$$

დაამტკიცე, რომ დირიხლეს ფუნქცია პერიოდული ფუნქციაა და დაადგინე მისი პერიოდი. აქვს თუ არა ამ ფუნქციას უმცირესი დადებითი პერიოდი?

შესაძლებელია თუ არა?

შესაძლებელია თუ არა, რომ ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია იყოს პერიოდული?

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №2

1 $\frac{37}{20}$ -ის ათწილადი ჩანაწერია:

ა) 3,7; ბ) 0, 37; გ) 1,85; დ) 1,17.

2 მოცემული წილადებიდან რომელი ჩაიწერება სასრული ათწილადის სახით?

ა) $\frac{11}{6}$; ბ) $\frac{21}{30}$; გ) $1\frac{7}{9}$; დ) $\frac{12}{17}$.

3 წარმოადგინე ათწილადის სახით $\frac{13}{15}$.

ა) 0,8(6); ბ) 0,6(8); გ) 0,(13); დ) 0,(15).

4 წარმოადგინე პერიოდული ათწილადი წილადის სახით 3,42(5).

ა) $\frac{31}{9}$; ბ) $3\frac{21}{990}$; გ) $3\frac{5}{900}$; დ) $3\frac{383}{900}$.

5 მოცემული რიცხვებიდან რომელია ირაციონალური რიცხვი?

ა) 7,(7); ბ) 0,13(15); გ) $\sqrt{2,25}$; დ) $\sqrt{5}$.

6 $\sqrt{3}$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეათედის სიზუსტის არის:

ა) 1,5; ბ) 1,3; გ) 1,7; დ) 1,17.

7 ქვემოთ მოცემული გამონათქვამებიდან რომელია მცდარი? შენი მოსაზრება დაასაბუთე კონტრმაგალითის მოყვანით.

ა) ყოველი ნატურალური რიცხვი მთელი რიცხვია;
ბ) ყოველი პერიოდული ათწილადი რაციონალური რიცხვია;
გ) ნებისმიერი ორი ირაციონალური რიცხვი ჯამი ირაციონალური რიცხვია;
დ) ნებისმიერი ორი რაციონალური რიცხვი ჯამი რაციონალური რიცხვია.

8 თუ f და g ერთი და იმავე განსაზღვრის არის მქონე პერიოდული ფუნქციებია, f -ის უმცირესი დადებითი პერიოდია 7, ხოლო g-ს უმცირესი დადებითი პერიოდი – 8, რა პერიოდი ექნება f+g ფუნქციას?

9 ვთქვათ, y=f(x) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქციაა. იქნება თუ არა პერიოდული y=f(2x) ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთე.

10 არის თუ არა პერიოდული $f(x)=x^2$ ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთე.

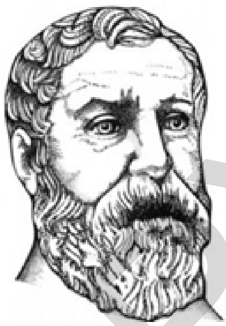
თავი 3. ტრიგონომეტრია

ამ თავში ისწავლი:

❖ კუთხის რადიანულ ზომას;
❖ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებას ნებისმიერი რიცხვითი არგუმენტისთვის;
❖ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებებსა და გრაფიკს;
❖ დაყვანის ფორმულებს;
❖ უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნას;
❖ კოსინუსების თეორემას;
❖ სინუსების თეორემას;
❖ მრავალკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

❖ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკების აგებას;
❖ პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების ამოცნობას;
❖ დაყვანის ფორმულების გამოთვლების საწარმოებლად გამოყენებას;
❖ სამკუთხედის ამოხსნას (სამკუთხედის სამი ელემენტით დანარჩენი ელემენტების პოვნას);
❖ სამკუთხედის სამი ელემენტით მედიანის, ბისექტრისის, სიმაღლის, ფართობის, ჩახაზულ და შემოხაზულ წრეთა რადიუსების პოვნას;
❖ მიუვალ ადგილამდე მანძილის, ორ ობიექტს შორის მანძილის, ობიექტის ზომების დადგენას ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.



ჰერონ ალექსანდრიელი
ახ.წწ. I საუკუნე
მათემატიკოსი და
ინჟინერ-გამომგონებელი

ჰერონი ყველა დროის ერთ-ერთ უდიდეს გამომგონებლადაა მიჩნეული. ინფორმაცია მისი მათემატიკური მიღწევებისა და საოცარი საინჟინრო გამოგონებების შესახებ შეგიძლია მოიძიო ინტერნეტში.

კომპლექსური დავალება
„გეომეტრიული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით"

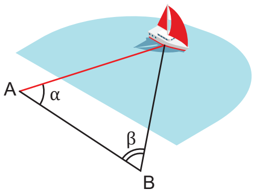
ტრიგონომეტრია ქართულად სამკუთხედის გაზომვას ნიშნავს. იგი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის მიმართებებს ადგენს. ტრიგონომეტრიული გამოთვლები გამოიყენება მათემატიკის, ფიზიკისა და საინჟინრო საქმის ყველა მიმართულებაში. ტრიგონომეტრიას იყენებენ ასტრონომები ვარსკვლავებამდე, ხოლო გეოგრაფები გეოგრაფიულ ობიექტებამდე მანძილის დასადგენად, მედიკოსები კომპიუტერულ ტომოგრაფიაში, ნავიგაციის სპეციალისტები საჰაერო და საზღვაო ნავიგაციაში და სხვ.

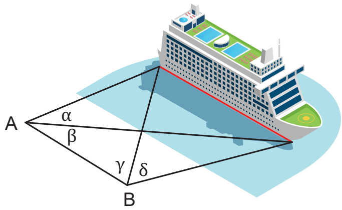
ტრიგონომეტრიას გარკვეული გაზომვების ჩასატარებლად წინა წლებშიც ვიყენებდით. ვადგენდით ხის ან შენობის სიმაღლეს, მანძილს ორ წერტილს შორის და ა.შ. მაგრამ ყველა ამ გამოთვლაში ვსარგებლობდით მხოლოდ მართკუთხა სამკუთხედში არსებული ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულებით.

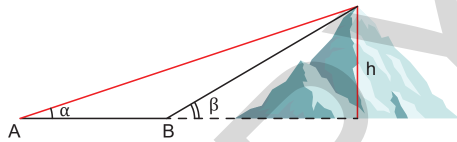
ამ თავში მოცემული მასალა, რომელიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების უფრო ღრმა ანალიზს ეთმობა, საშულებას გვაძლევს ამოვხსნათ ნებისმიერი სამკუთხედი, ანუ სამკუთხედის მოცემული სამი ელემენტით, რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი, ვიპოვოთ სამკუთხედის დანარჩენი ელემენტები.

სამკუთხედის ამოხსნის ამ თავში განხილული მეთოდები საშუალებას იძლევა პრაქტიკული გაზომვები ვაწარმოოთ გასაზომი ობიექტიდან დიდ მანძილზე ყოფნის შემთხვევაშიც. ასეთი გაზომვის რამდენიმე მაგალითი სახელმძღვანელოშია მოცემული.

ქვემოთ მოცემულია სამი სქემატური ნახაზი, რომელთაგან ერთზე ნაპირიდან ზღვაში მოდრეიფე გემამდე მანძილი, მეორე შემთხვევაში – გემის სიგრძე, ხოლო მესამე შემთხვევაში – მწვერვალამდე მანძილი და მწვერვალის სიმაღლეა გამოსათვლელი.







შენი დავალება:

1. ნახაზებზე მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის სიტყვიერად აღწერე საძიებელი სიდიდეების პოვნის ეტაპები და გამოსახე ეს სიდიდეები ნახაზზე მოცემული სიდიდეების საშუალებით (ნახაზებზე მოცემულად ითვლება AB მონაკვეთი და მასთან მდებარე კუთხეები);

2. მიღებული შედეგები გამოიყენე პრაქტიკული გაზომვებისათვის:

ა) გაზომვები ჩაატარე შენთვის მოხერხებული სხვადასხვა ობიექტის შემთხვევაში (მაგალითად გაზომე მანძილი, მახლობლად მდგომ ობიექტამდე, ხის ან შენობის სიმაღლე, უახლოესი გორაკის ან მთის სიმაღლე და სხვა). შეეცადე, რომ ჩატარებული გაზომვები მოიცავდეს მოცემული ნახაზების სამივე შემთხვევას;

ბ) გაითვალისწინე, რომ ნახაზებზე მოცემული AB მონაკვეთის სიდიდის შერჩევისას, რაც, ერთი შეხედვით, მხოლოდ შენზეა დამოკიდებული, რეალური შედეგის მისაღებად ეს სიდიდე გასაზომი ობიექტის თანაზომადი უნდა იყოს. მაგალითად, თუ ხის სიმაღლის გასაზომად საკმარისია AB-სთვის ავიღოთ 1-2 მეტრი, მყინვარის სიმაღლის გასაზომად ასეთი სიგრძის მონაკვეთი არ გამოდგება, რადგან ამ შემთხვევაში α და β კუთხეებს შორის განსხვავება პრაქტიკულად არ დაფიქსირდება. ამიტომაა, რომ მაგალითად, მახლობელ პლანეტებამდე მანძილის გასაზომად A-სა და B-ს როლში იღებენ დედამიწის ორ უშორეს წერტილთა წყვილს, ხოლო შორეულ ვარსკვლავებამდე მანძილის გასაზომად დედამიწაზე არსებული მანძილები გამოუსადეგარია;

გ) კუთხეთა გასაზომად კუთხის მზომი ხელსაწყო შეგიძლია თვითონ დაამზადო.

3. შეადარე შენ მიერ ჩატარებული გაზომვის შედეგები რეალურ ზომებს;

4. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ გაზომე საჭირო კუთხეები;
- როგორ გამოთვალე კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები;
- რა ნიშნით შეარჩიე გასაზომი მანძილები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად;

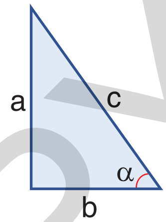
5. ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და იმ ობიექტების ფოტოები, რომელთა ზომებიც გამოთვალე.

მიზანი

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით

აქამდე ტრიგონომეტრიული ფუნქიების განმარტება ვიცოდით მახვილი კუთხის შემთხვევაში. ამ განმარტებაში ვიყენებდით მართკუთა სამკუთხედს. გავიხსენოთ ეს განმარტებები (ნახ.1):

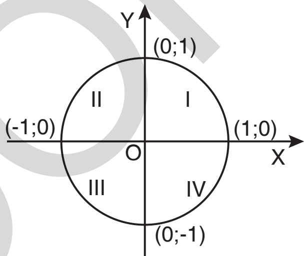
$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\ \cos\alpha=\frac{b}{c};\ \text{tg}\alpha=\frac{a}{b}. \qquad (1)$$



ნახ. 1

ჩვენი მიზანია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განვმარტოთ ნებისმიერი გრადუსული ზომის არგუმენტისათვის.

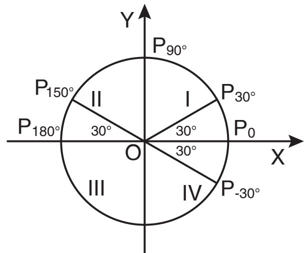
საკოორდინატო სიბრტყეზე დავხაზოთ 1-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 2). ასეთ წრეწირს **ერთეულოვანი წრეწირი** ეწოდება. ეს წრეწირი საკოორდინატო ღერძებს გადაკვეთს (1; 0), (0; 1), (–1; 0) და (0; –1) კოორდინატების მქონე წერტილებში და ამ წერტილებით იყოფა 4 ღია რკალად, რომლებიც გადანომრილია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 2

(1; 0) კოორდინატების მქონე წერტილი აღვნიშნოთ P_0-ით (ნახ.3),

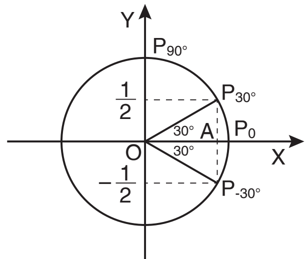
ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α-თი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი წრეწირის ის წერტილი, რომელიც მიიღება P_0 წერტილის α გრადუსით მობრუნებით კოორდინატთა სათავის მიმართ. ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ დადებითი α-სათვის მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო უარყოფითი α-სათვის – საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. მე-3 ნახაზზე ნაჩვენებია P_α წერტილის მდებარეობა, როცა α=30°, 90°, 150° და –30°.



ნახ. 3

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ P_α წერტილის კოორდინატები, როცა: ა) α=30°; ბ) α=–30°; გ) α=390°.

ამოხსნა. ა) იმის გამო, რომ $OAP_{30°}$ მართკუთხა სამკუთხედში OP_{30} ჰიპოტენუზა (ნახ.4) 1-ის ტოლია, $AP_{30°}$ კათეტი იქნება $\frac{1}{2}$-ის, ხოლო OA კათეტი $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ის ტოლი. მაშასადამე, $P_{30°}$ წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$;



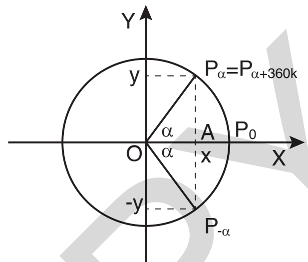
ნახ. 4

ბ) $P_{-30°}$ წერტილი $P_{30°}$ წერტილის სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, ამიტომ მისი პირველი კოორდინატი იგივეა, რაც $P_{30°}$-ის პირველი კოორდინატი, ანუ $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ხოლო მეორე კოორდინატი – მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული, ანუ $-\frac{1}{2}$.

გ) 390°=30°+360°, ე.ი. $P_{390°}$ წერტილი მიიღება P_0 წერტილის ჯერ 30 გარადუსით, ხოლო შემდეგ 360 გრადუსით მობრუნებისას. მაგრამ 360 გრადუსით მობრუნება ერთი სრული ბრუნია, ანუ $P_{390°}=P_{30°}$.

პასუხი: ა) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$; ბ) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$; გ) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

ანალოგიური მსჯელობით ადვილად დარწმუნდები ქვემოთ მოცემული თეორემის მართებულობაში (იმსჯელე მე-5 ნახაზის მიხედვით):



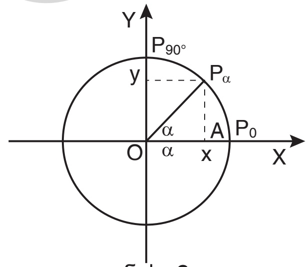
ნახ. 5

თეორემა 1. თუ P_α წერტილის კოორდინატებია (x; y), მაშინ $P_{-\alpha}$ წერტილის კოორდინატები იქნება (x; –y), ხოლო $P_{\alpha+360\cdot k}$ წერტილის კოოორდინატები, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია – ისევ (x;y).

ვთქვათ, $0°<\alpha<90°$ და P_α წერტილის კოორდინატებია (x;y) (ნახ.6). თუ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების (1) ტოლობებით მოცემულ განმარტებებს დავწერთ OAP_α მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$\sin\alpha=\frac{AP_\alpha}{OP_\alpha}=\frac{y}{1}=y;\ \cos\alpha=\frac{AO}{OP_\alpha}=\frac{x}{1}=x;\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{AP_\alpha}{OA}=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

მივიღეთ, რომ თუ α მახვილი კუთხის ზომაა, მაშინ P_α წერტილის პირველი კოორდინატაა cosα, მეორე კოორდინატა – sinα, ხოლო მეორე კოორდინატის პირველ კოორდინატთან ფარდობა – tgα. ამ გარემოებაზე დაყრდნობით შეგვიძლია განვმარტოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნებისმიერი α-სთვის:



ნახ. 6

განმარტება. ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α წერტილის აბსცისას ეწოდება cosα, ხოლო ორდინატას – sinα. იმ შემთხვევაში, როცა აბსცისა განსხვავდება 0-ისგან, ორდინატის აბსცისასთან ფარდობას ეწოდება tgα.

მაშასადამე: ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α წერტილის კოორდინატებია (cosα; sinα).

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ა) sin0°, cos0°, tg 0°; ბ) sin90°, cos90°, tg90°.

ა) მე-6 ნახაზზე P_0 წერტილის კოორდინატებია (1;0), რაც, განმარტების თანახმად, ნიშნავს:

$\sin0°=0,\ \cos0°=1,\ \mathrm{tg}0°=\dfrac{0}{1}=0;$

ბ) მე-6 ნახაზზე P_{90} წერტილის კოორდინატებია (0;1), რაც, განმარტების თანახმად ნიშნავს: sin90°=1, cos90°=0, ხოლო tg90° არ არსებობს, რადგან 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება.

1-ელი თეორემიდან და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მოცემული განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ნებისმიერი α არგუმენტისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha; \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+360°\cdot k)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+360°\cdot k)=\cos\alpha, \qquad (3)$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ sin (–750°) და cos(–750°).

ამოხსნა. მე-2 ტოლობების ძალით sin (–750°)=–sin 750° და cos(–750°)= cos750°, ხოლო მე-3 ტოლობების ძალით:

$\sin750°=\sin(30°+2\cdot360°)=\sin30°=\dfrac{1}{2},\ \cos750°=\cos(30°+2\cdot360°)=\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

პასუხი. $\sin(-750°)=-\dfrac{1}{2},\ \cos(-750°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?
2. რას ეწოდება ერთეულოვანი წრეწირი?
3. რა კოორდინატების მქონე წერტილში კვეთს ერთეულოვანი წრეწირი აბსცისათა ღერძს? ორდინატთა ღერძს?
4. რა კოორდინატები აქვს: ა) $P_{0°}$; ბ) $P_{180°}$; გ) $P_{270°}$; დ) $P_{-90°}$ წერტილს?
5. P_α წერტილის რომელი კოორდინატია $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?
6. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება არგუმენტის ნიშნის შეცვლით?
7. რა ნიშანი ექნება: ა) $\sin\alpha$-ს; ბ) $\cos\alpha$-ს, როცა $90°<\alpha<180°$?

სავარჯიშოები

1 დახაზე ერთეულოვანი წრეწირი და მონიშნე მასზე P_α წერტილი, სადაც:
ა) $\alpha=10°$; ბ) $\alpha=-45°$; გ) $\alpha=-90°$; დ) $\alpha=300°$; ე) $\alpha=120°$; ვ) $\alpha=270°$.

2 გაარკვიე, რომელ მეოთხედშია P_α წერტილი, თუ α არის:
$285°$; $-376°$; $204°$; $-172°$; $-12°$; $730°$; $-90°$; $800°$.

3 ვთქვათ, P_α წერტილის კოორდინატებია $(x;y)$. იპოვე P_β წერტილის კოორდინატები, თუ:
ა) $\beta=\alpha-360°$; ბ) $\beta=\alpha+720°$; გ) $\beta=\alpha+180°$.

4 დაადგინე, დადებითია თუ უარყოფითი:
ა) $\sin65°$; $\sin105°$; $\sin161°$; $\sin179°$; $\sin200°$; $\sin250°$; $\sin365°$; $\sin380°$;

ბ) $\cos40°$; $\cos87°$; $\cos100°$; $\cos192°$; $\cos200°$; $\cos250°$; $\cos339°$; $\cos380°$;

გ) $\mathrm{tg}40°$; $\mathrm{tg}80°$; $\mathrm{tg}100°$; $\mathrm{tg}102°$; $\mathrm{tg}185°$; $\mathrm{tg}250°$; $\mathrm{tg}286°$; $\mathrm{tg}320°$; $\mathrm{tg}368°$.

5 დაადგინე, რომელ მეოთხედებშია დადებითი: ა) სინუსი; ბ) კოსინუსი; გ) ტანგენსი.

6 რა ნიშანი აქვს ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებას?
ა) $\sin145°$; ბ) $\sin(-92°)$; გ) $\cos145°$; დ) $\cos(-45°)$; ე) $\mathrm{tg}96°$; ვ) $\mathrm{tg}182°$.

7 რა ნიშანი აქვს ნამრავლს?
ა) $\sin85°\cdot\sin102°$; ბ) $\cos184°\cdot\cos172°$; გ) $\sin142°\cdot\sin142°\cdot\mathrm{tg}142°$;

დ) $\mathrm{tg}111°\cdot\mathrm{tg}172°$; ე) $\cos192°\cdot\mathrm{tg}255°$; ვ) $\sin80°\cdot\mathrm{tg}290°\cdot\cos170°$.

8 რომელია მეტი:
ა) $\sin20°$ თუ $\sin40°$? ბ) $\cos20°$ თუ $\cos40°$? გ) $\mathrm{tg}20°$ თუ $\mathrm{tg}40°$?

9 განსაზღვრე სხვაობის ნიშანი:
ა) $\sin25°-\sin26°$; ბ) $\sin130°-\sin240°$; გ) $\cos25°-\cos26°$;

დ) $\sin45°-\sin40°$; ე) $\sin62°-\sin70°$; ვ) $\cos40°-\cos42°$.

10 ჩაწერე ზრდის მიხედვით:

ა) sin 60°, sin 20°, sin 70°, sin 30°, sin 45°, sin 80°;

ბ) cos50°, cos60°, cos40°, cos30°, cos90°, cos45°.

11 იპოვე:

ა) sin180°, cos180°, tg180°; ბ) sin270°, cos270°, tg270°;

გ) sin360°, cos360°, tg360°.

12 გამოთვალე:

ა) sin 405°, cos405°, tg405°; ბ) sin (–405°), cos(–405°), tg(–405°);

გ) sin 420°, cos420°, tg420°; დ) sin (–420°), cos(–420°), tg(–420°);

ე) sin 720°, cos720°, tg720°; ვ) sin (–720°), cos(–720°), tg(–720°).

13 წარმოადგინე ტრიგონომეტრიული ფუნქცია 0°-სა და 360°-ს შორის მოთავსებული არგუმენტით:

ა) $\sin585°$; ბ) $\cos(-860°)$; გ) $\mathrm{tg}506°$; დ) $\sin(-576°)$; ე) $\cos770°$; ვ) $\mathrm{tg}(1810°)$.

14 იპოვე:

ა) sin13°, თუ sin 733°=a; ბ) cos55°, თუ cos 415°=b; გ) tg380°, თუ tg20°=c.

15 იპოვე:

ა) $\sin\alpha$, თუ $\sin(720°-\alpha)=a$; ბ) $\cos\alpha$, თუ $\cos(720°-\alpha)=b$;

გ) $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\mathrm{tg}(720°-\alpha)=c$.

16 დაასახელე ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე სინუსი $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ის ტოლია.

17 დაასახელე ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე ტანგენსი 1-ის ტოლია.

18 დაასახელე 0°-სა და 360°-ს შორის მოთავსებული ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე კოსინუსი 0-ის ტოლია.

19 გამოთვალე $\sin\alpha+\cos\alpha$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა:

ა) $\alpha=0°$; ბ) $\alpha=45°$; გ) $\alpha=60°$; ბ) $\alpha=90°$; გ) $\alpha=180°$; დ) $\alpha=270°$.

20 გამოთვალე:

ა) $5\sin90°+2\cos0°-2\sin270°+10\cos180°$; ბ) $13\sin0°+12\cos90°-3\mathrm{tg}30°$;

გ) $3\mathrm{tg}0°+2\cos90°+3\sin270°-3\cos180°$; დ) $\sqrt{2}\cos45°-\sqrt{3}\mathrm{tg}60°+2\,\mathrm{tg}45°$.

21 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4a\sin^2 45°-3(a\mathrm{tg}45°)^2-(2a\cos45°)^2$;

ბ) $\dfrac{(a\sin90°)^2-(b\mathrm{tg}45°)^2}{2a^2\sin30°-2ab\cos0°+(b\mathrm{tg}45°)^2}$;

გ) $\dfrac{(2a\cos60^\circ)^2-\left(\dfrac{b}{\mathrm{tg}45^\circ}\right)^2+(3ab\sin0^\circ)^2}{2a\sin30^\circ-2b\cos^2 45^\circ+(5a\cos0^\circ\cdot\mathrm{tg}0^\circ)^3}$; დ) $\dfrac{4-2\mathrm{tg}45^\circ+\mathrm{tg}^2 60^\circ}{3\sin90^\circ-4\cos^2 30^\circ+\mathrm{tg}^2 30^\circ}$.

22 რა სიგრძის რკალს შემოწერს ერთეულოვან წრეწირზე P_α წერტილი:

ა) P_0 წერტილიდან P_{90° წერტილამდე მოძრაობისას?
ბ) P_0 წერტილიდან P_{180° წერტილამდე მოძრაობისას?
გ) P_{45° წერტილიდან P_{60° წერტილამდე მოძრაობისას?

23 გამოთვალე:
ა) sin 120°, cos120°, tg120°; ბ) sin 150°, cos150°, tg150°;
გ) sin 300°, cos300°, tg300°.

24 ვთქვათ, sin 20° =a. იპოვე α, რომლისთვისაც:
ა) $\sin\alpha=a$ და $90^\circ<\alpha<180^\circ$; ბ) $\sin\alpha=-a$ და $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

25 ვთქვათ, cos 20° =a. იპოვე α, რომლისთვისაც:
ა) $\cos\alpha=-a$ და $90^\circ<\alpha<180^\circ$; ბ) $\cos\alpha=a$ და $0^\circ<\alpha<360^\circ$.

26 იპოვე ყველა α, რომლისთვისაც: ა) $\sin\alpha=0$; ბ) $\cos\alpha=0$.

27 რამდენჯერ აღემატება წრეწირის სიგრძე მის დიამეტრს? რადიუსს?

28 რა სიგრძისაა 1 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის რკალი, თუ მისი გრადუსული ზომაა:
ა) 180°; ბ) 90°; გ) 60°; დ) 45°; ე) 30°; ვ) 15°.

29 გამოთვალე მანძილი საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე P(x;y) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ:
ა) x=3, y=4;
ბ) $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$;
გ) $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

30 საკოორდინატო სიბრტყის მეორე მეოთხედში მდებარე A წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი 1-ის ტოლია. A წერტილის აბსცისა – 0,3-ის ტოლია. იპოვე A წერტილის ორდინატა.

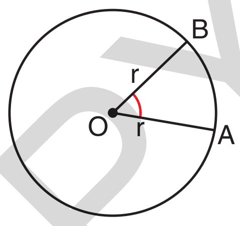
აბა, სცადე!

მოცემულია ორი ცვლადიანი გამონათქვამი:
1. $\sin\alpha+\cos\alpha>1$;
2. P_α წერტილი ეკუთვნის I მეოთხედს.
დაამტკიცე ამ ორი გამონათქვამის ტოლფასობა და ჩამოაყალიბე თეორემის სახით.

3.2 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მიზანი

კუთხის რადიანული ზომის შემოღება და რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება.



ნახ. 1

წინა პარაგრაფში ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განვმარტეთ, როგორც გრადუსებში მოცემული არგუმენტის ფუნქციები. ჩვენი მიზანია იგივე ფუნქციები **რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციებად**, ანუ ისეთ ფუნქციებად ვაქციოთ, რომელთა განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნება.

როგორც ვიცით, ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა განისაზღვრება მისი შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომით: წრეწირი იყოფა 360 ტოლ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს 1-გრადუსიანი რკალი ეწოდება. ყოველი რკალი იმდენ გრადუსიანად ითვლება, რამდენ 1-გრადუსიან რკალსაც შეიცავს.

გავეცნოთ კუთხის ახალ საზომ ერთეულს – რადიანს.

კუთხის რადიანული ზომაც წრეწირთან არის დაკავშირებული:

განმარტება. 1 რადიანის ტოლი კუთხე ეწოდება ცენტრალურ კუთხეს, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია.

1-ელ ნახაზზე $\angle AOB=1$რად, რადგან $\overset{\smile}{AB}=AO=OB=r$.

დავადგინოთ კავშირი კუთხის რადიანულ და გრადუსულ ზომებს შორის. ვიცით, რომ r-რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე $2\pi r$-ის ტოლია, ანუ წრეწირის სიგრძე რადიუსს 2π-ჯერ აღემატება. ეს ნიშნავს, რომ სრული კუთხის გრადუსული ზომა, ანუ 360 გრადუსი, 2π რადიანის ტოლია. აქედან ვასკვნით, რომ π რადიანი 180 გრადუსის ტოლია, ე.ი.

$$1\text{რად}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ. \qquad (1)$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისთვის

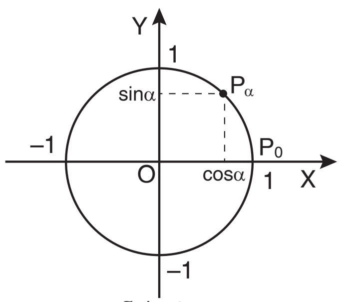
$$\alpha\ \text{რად}=\alpha\cdot\frac{180^\circ}{\pi}. \qquad (2)$$

მაგალითად,

$$\frac{\pi}{2}\text{რად}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=90^\circ, \qquad \frac{\pi}{6}\text{რად}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=30^\circ,$$

ხოლო

$$5\ \text{რად}=5\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\approx 5\cdot 57^\circ=285^\circ.$$



ნახ. 2

ისევე, როგორც გრადუსული ზომის არგუმენტისთვის, რიცხვითი არგუმენტისთვისაც ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით განიმარტება. კერძოდ, ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისთვის P_α წერტილი მიიღება P_0 წერტილისგან კოორდინატთა სათავის მიმართ α რადიანით მობრუნებით, ხოლო $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ შესაბამისად, P_α წერტილის ორდინატას და აბსცისას წარმოადგენენ (ნახ. 2).

მაგალითი. გამოვთვალოთ: ა) $\sin\frac{\pi}{6}$; ბ) $\cos\frac{3\pi}{2}$; გ) $\mathrm{tg}\pi$.

ამოხსნა: ა) $\frac{\pi}{6}$ რად$=30°$, ამიტომ $\sin\frac{\pi}{6}=\sin30°=\frac{1}{2}$;

ბ) $\frac{3\pi}{2}$ რად$=270°$, ამიტომ $\cos\frac{3\pi}{2}=\cos270°=0$;

გ) $\mathrm{tg}\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{\sin180°}{\cos180°}=\frac{0}{1}=0.$

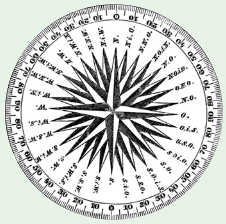
უპასუხე კითხვებს:

1. რა სიდიდის ცენტრალურ კუთხეს ეწოდება 1 რადიანის ტოლი?
2. წრეწირის რა ნაწილია 1 რადიანის ტოლი რკალი?
3. რამდენი გრადუსს უდრის ერთი რადიანი?
4. რას ეწოდება რიცხვითი არგუმენტის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?
5. დაახლოებით, რამდენ გრადუსს უდრის 2 რადიანი? 0,5 რადიანი?
6. რომელ მეოთხედშია P_3 წერტილი? P_5 წერტილი?

სავარჯიშოები

1 წრეწირი 15 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვე თითოეული რკალის რადიანული ზომა.

2 ზღვის კომპასის წრეწირი 32 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი, თითოეულს რუმბი ეწოდება. გამოთვალე რუმბის რადიანული ზომა.



3 რამდენი რადიანით შემობრუნდება საათის წუთების მაჩვენებელი ისარი:

ა) ნახევარ საათში? ბ) 2 სთ-ში?

4 რომელ მეოთხედშია P_α, თუ ა) $\alpha=1$; ბ) $\alpha=2$; გ) $\alpha=3$; დ) $\alpha=4$; ე) $\alpha=1{,}8\pi$.

5 დაადგინე მოცემული რიცხვის ნიშანი:

ა) $\sin\frac{4}{5}\pi$; $\sin\frac{3}{4}\pi$; $\sin\frac{2}{3}\pi$; $\sin\frac{2}{5}\pi$; $\sin\frac{2}{45}\pi$; $\sin\frac{5}{36}\pi$; $\sin\frac{14}{45}\pi$.

ბ) $\cos\frac{4}{5}\pi$; $\cos\frac{3}{4}\pi$; $\cos\frac{2}{3}\pi$; $\cos\frac{2}{5}\pi$; $\cos\frac{2}{45}\pi$; $\cos\frac{5}{36}\pi$; $\cos\frac{14}{45}\pi$.

გ) $\mathrm{tg}\frac{4}{5}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{3}{4}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{2}{3}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{2}{5}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{2}{45}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{5}{36}\pi$; $\mathrm{tg}\frac{14}{45}\pi$.

6 დადებითია თუ უარყოფითი: $\sin4$? $\cos1{,}5$? $\mathrm{tg}0{,}3$?

7 განსაზღვრე მოცემული რიცხვის ნიშანი, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right);\ \cos(\pi-\alpha);\ \mathrm{tg}(\pi+\alpha);\ \mathrm{tg}(2\pi-\alpha).$$

8 სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:4. სამკუთხედის კუთხეები გამოსახე რადიანებში.

9 სამკუთხედის ორი კუთხის ზომებია $\frac{\pi}{15}$ და $\frac{\pi}{5}$. გამოთვალე სამკუთხედის სამივე კუთხის გრადუსული ზომები.

10 ოთხკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3:5:6. ოთხკუთხედის თითოეული კუთხე გამოსახე რადიანებში.

11 გამოსახე რადიანებში წესიერი: ა) სამკუთხედის; ბ) ოთხკუთხედის; გ) ექვსკუთხედის კუთხეები.

12 გამოთვალე:

ა) $3\sin 2\pi - 2\cos 1,5\pi + 4\sin\pi - \operatorname{tg}\pi$; ბ) $8 - 2\sin 2\pi - 3\cos\pi + 2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi$;

გ) $2\sin\frac{\pi}{4} + 3\cos 2\pi + 5\operatorname{tg}2\pi$; დ) $4\operatorname{tg}2\pi - 2\sin\frac{1}{2}\pi + 3\cos\frac{3\pi}{2} - 4\operatorname{tg}\pi$.

13 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4a\sin^2\frac{\pi}{4} + \left(2a\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 - 3\left(a\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2$; ბ) $2b\sin\frac{\pi}{4} - 3a\operatorname{tg}0 + a\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

გ) $2b\cos\frac{\pi}{4} - 3a\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + a\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; დ) $\dfrac{\left(a\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(b\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2}{2a^2\sin\frac{\pi}{6} - 2ab\cos 0 + \left(b\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2}$.

14 რომელია მეტი:

ა) $\sin 1^\circ$ თუ $\sin 1$? ბ) $\sin 0,5$ თუ $\sin 0,6$? გ) $\sin 6^\circ$ თუ $\sin 6$?

დ) $\cos 0,8$ თუ $\cos 0,9$? ე) $\cos 60^\circ$ თუ $\cos\frac{\pi}{6}$? ვ) $\cos 30^\circ$ თუ $\cos 3$?

15 იპოვე ყველა α, რომლისთვისაც: ა) $\sin\alpha = 1$; ბ) $\cos\alpha = 1$; გ) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

16 მარიამმა და ანიმ მოცემული α არგუმენტისათვის გამოთვალეს სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობები. მათგან ერთ-ერთმა დაუშვა შეცდომა. რომელმა დაუშვა შეცდომა, თუ მარიამმა მიიღო:

$\cos\alpha = 0,8$, $\sin\alpha = -0,6$ და

ანიმ მიიღო: $\cos\alpha = 0,7$, $\sin\alpha = 0,2$?

17 რომელია მეტი: ა) $\sin 0,5$ თუ $0,5$? ბ) $\cos 0,5$ თუ $0,5$? გ) $\operatorname{tg}1$ თუ 1?

18 წრიული სექტორის ფართობი 36 კვ.სმ-ია, ხოლო ამ სექტორის რკალის შესაბამისი კუთხე – 0,5 რად. იპოვე წრის რადიუსი.

19 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისათვის $P_{-\alpha}$ წერტილი P_{α} წერტილის სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ.

20 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის $P_{\pi-\alpha}$ წერტილი P_{α} წერტილის სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

21 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის $P_{\pi+\alpha}$ წერტილი P_{α} წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

22 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის მართებულია ტოლობები:

ა) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;　　ბ) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

გ) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$;　　დ) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$;

ე) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$;　　ვ) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$.

23 დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის სრულდება ტოლობა: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

24 ქვემოთ მოცემული ფუნქციებიდან რომელი ფუნქციებია ლუწი? კენტი?

ა) $y=x^3+4x$;　ბ) $y=3x^2+5$;　გ) $y=\frac{7}{|x|}$;

დ) $y=x^2+5x$;　ე) $y=\sqrt{x}$;　ვ) $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

25 იპოვე ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\sqrt{x-20}$; ბ) $y=\frac{x-5}{x+4}$; გ) $y=\frac{1}{x}$;　დ) $y=\sqrt{x^2+4}$.

26 ვთქვათ, $\sin27°=a$. იპოვე:

ა) $\sin387°$;　ბ) $\sin(-27°)$;　გ) $\sin207°$;　დ) $\sin(-207°)$.

3.3 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები

მიზანი

რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ჩამოყალიბება და გამოყენება.

წინა პარაგრაფში სინუსი და კოსინუსი განვმარტეთ ნებისმიერი რიცხვითი არგუმენტისათვის. ეს ნიშნავს, რომ სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე: R=(–∞; +∞). ამ ფუნქციების განმარტებიდანვე გამომდინარეობს, რომ თითოეული მათგანის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] ჩაკეტილი შუალედი (ახსენი, რატომ). ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin : R \to [-1;1],\ \cos : R \to [-1;1].$$

იმის გამო, რომ ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისთვის P_α და $P_{-\alpha}$ წერტილები აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია (იხ. 1.1 პარაგრაფის ნახ.5), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha. \qquad (1)$$

ეს ტოლობები ნიშნავს, რომ სინუსი კენტი, ხოლო კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა.

თუ 1.1 პარაგრაფში მოცემულ მე-3 ტოლობას ჩავწერთ რიცხვითი არგუმენტის შემთხვევაში და გავითვალისწინებთ, რომ 360°=2π რად, მივიღებთ:

$$\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha,\ k\in Z. \quad (2)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სინუსი და კოსინუსი **პერიოდული ფუნქციებია** და მათი პერიოდი 2π-ს ჯერადი რიცხვებია.

დავამტკიცოთ, რომ 2π სინუსისა და კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდია.

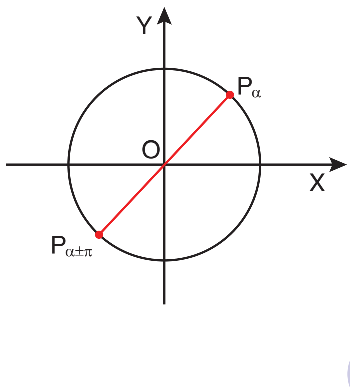
ის რომ, 2π ამ ფუნქციების პერიოდია, უკვე ვიცით. ვაჩვენოთ, რომ 2π-ზე მცირე დადებითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს სინუსის პერიოდი. მართლაც, დავუშვათ, არსებობს ისეთი $0<T<2\pi$ რიცხვი, რომ ყოველი α არგუმენტისთვის $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$. თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $\sin(\frac{\pi}{2}+T)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. მაგრამ სინუსი 1-ის ტოლი მხოლოდ $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ სახის არგუმენტისათვის ხდება (ახსენი, რატომ), რაც გამორიცხავს $0<T<2\pi$ პირობას.

ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ 2π-ზე მცირე დადებითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს კოსინუსის პერიოდი. ამ შემთხვევაში $\cos(\alpha+T)=\cos\alpha$ ტოლობაში უნდა ჩავსვათ $\alpha=0$. მივიღებთ $\cos T=\cos 0=1$, ეს ტოლობა კი მხოლოდ მაშინ შესრულდება, როცა $T=2\pi k,\ k\in Z$.

განმარტების თანახმად $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. ამასთან, იმისათვის, რომ წილადს აზრი ჰქონდეს, უნდა მოვითხოვოთ $\cos\alpha\neq0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, სახის რიცხვები არ ეკუთვნის ტანგენსის განსაზღვრის არეს.

ცხადია, 2π და მისი ჯერადები ტანგენსისთვისაც იქნება პერიოდი. მაგრამ ტანგენსს აქვს უფრო მცირე პერიოდიც. კერძოდ, ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია π.

მართლაც, იმის გამო, რომ $P_{\alpha+\pi}=P_{\alpha-\pi}$ და ეს წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, შეგვიძლია დავწეროთ:



$$\sin(\alpha\pm\pi)=-\sin\alpha,\qquad \cos(\alpha\pm\pi)=-\cos\alpha.$$

ე.ი. $$\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\frac{\sin(\alpha\pm\pi)}{\cos(\alpha\pm\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

ტანგენსი 0-ის ტოლი მხოლოდ π-ის ჯერად რიცხვებზე ხდება. ამიტომ, π ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია.

შევნიშნოთ, რომ ტანგენსი ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობას ღებულობს.

P_α წერტილი კოორდინატთა სათავიდან 1-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველი α არგუმენტისათვის პითაგორას თეორემიდან გამომდინარე, სრულდება ტოლობა:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\cos\alpha\neq0$ და მე-3 ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $\cos^2\alpha$-ზე, მივიღებთ:

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z. \qquad (4)$$

მე-3 და მე-4 ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ერთ-ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობით გამოვთვალოთ დანარჩენი ორი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა.

მაგალითი1. ა) ვიპოვოთ $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=0{,}6$; ბ) ვიპოვოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{2}$.

ამოხსნა. ა) მე-3 ფორმულით $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=0{,}64$, აქედან $\cos\alpha=\pm0{,}8$; $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\pm0{,}75$;

ბ) მე-4 ფორმულით $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{9}$, აქედან $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$; $\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

პასუხი. ა) $\cos\alpha=\pm0{,}8$, $\mathrm{tg}\alpha=\pm0{,}75$; ბ) $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{3}$, $\sin\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

ამ მაგალითით დავრწმუნდით, რომ როგორც ა), ისე ბ) შემთხვევაში ნიშნით განსხვავებული ორ-ორი პასუხი მიიღება. იმისათვის, რომ ასეთ მაგალითებში ცალსახა პასუხები მივიღოთ, უნდა გვქონდეს დამატებითი ინფორმაცია, რომლის საშუალებითაც დავასკვნით ფუნქციის საძიებელი მნიშვნელობის ნიშანს.

მაგალითად, თუ ა) შემთხვევაში მოცემულ პირობასთან ერთად გვეცოდინება, რომ P_α წერტილი ეკუთვნის მე-2 მეოთხედს, იმის გამო, რომ მეორე მეოთხედში $\cos\alpha$ უარყოფითია, $\pm0{,}8$ ნაცვლად პასუხი იქნებოდა $-0{,}8$.

მსგავსი მაგალითების ამოსახსნელად სასარგებლოა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების ცოდნა. ეს ნიშნები მოცემულია სქემებზე.

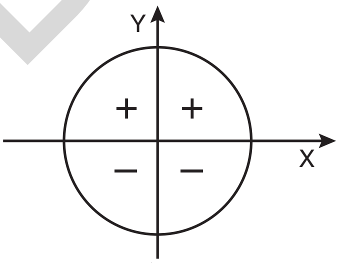
მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=f(x)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, თუ:

ა) $f(x)=\sin2x$; ბ) $f(x)=\sin2x+\cos3x$.

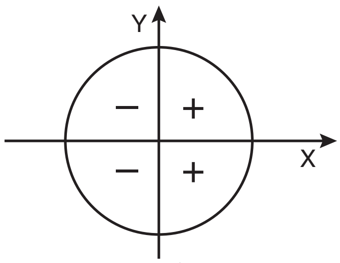
ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ თუ $y=f(x)$ ფუნქციის პერიოდია T, მაშინ $y=f(ax+b)$ ფუნქციის პერიოდი, სადაც a და b მოცემული რიცხვებია, ამასთან $a\neq0$, იქნება $\dfrac{T}{a}$.

მართლაც,

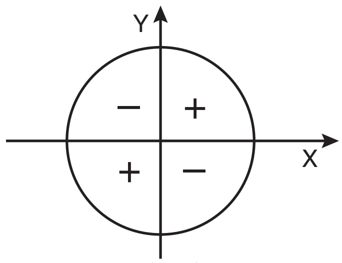
$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+b+T)=f(ax+b).$$



სინუსი



კოსინუსი



ტანგენსი

ა) როგორც ვიცით, $y=\sin x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ამიტომ $y=\sin 2x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი იქნება $2\pi:2=\pi$.

ბ) $y=\sin 2x$ ფუნქციის პერიოდია π და მისი ჯერადი რიცხვები, ხოლო $y=\cos 3x$ ფუნქციის – $\frac{2\pi}{3}$ და მისი ჯერადი რიცხვები. $\sin 2x$-ისა და $\cos 3x$-ის პერიოდის უმცირესი საერთო ჯერადი, ანუ უმცირესი დადებითი რიცხვი იქნება 2π. ე.ი. 2π არის, როგორც $y=\sin 2x$ ფუნქციის, ისე $y=\cos 3x$ ფუნქციის პერიოდი, ამიტომ 2π იქნება მათი ჯამის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ფუნქციას ეწოდება ლუწი ფუნქცია? კენტი ფუნქცია?
2. რა სიმრავლეა სინუსის განსაზღვრის არე? ტანგენსის განსაზღვრის არე?
3. რა სიმრავლეა სინუსის მნიშვნელობათა სიმრავლე? ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლე?
4. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია კენტი? ლუწი?
5. რა არის კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდი? ტანგენსის?
6. რომელ მეოთხედებშია ტანგენსი დადებითი? კოსინუსი?

სავარჯიშოები

1 იპოვე:

ა) $\sin 2{,}5\pi$; ბ) $\sin 5\pi$; გ) $\sin(-2{,}5\pi)$; დ) $\sin 20\pi$;

ე) $\sin\frac{7\pi}{3}$; ვ) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; ზ) $\cos 4{,}5\pi$; თ) $\cos(-4{,}5\pi)$;

ი) $\cos\frac{13\pi}{6}$; კ) $\cos\frac{11\pi}{6}$; ლ) $\cos\frac{5\pi}{3}$; მ) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

ნ) $\mathrm{tg}3\pi$; ო) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; პ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; ჟ) $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}$;

რ) $\mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; ს) $\mathrm{tg}\frac{19\pi}{6}$.

2 მოცემული ფუნქციებიდან რომელია კენტი? ლუწი? არც კენტი და არც ლუწი?

ა) $y=x^3+\sin x$; ბ) $y=2\cos x+\sin^2 x$;

გ) $y=\frac{\cos x}{\sin^3 x}$; დ) $y=\frac{1+2\sin x}{1-2\cos x}$.

3 პერიოდულია თუ არა ფუნქცია:

ა) $y=x-\sin x$? ბ) $y=2\cos x+\sin x$?

გ) $y=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$? დ) $y=\frac{2-\sin x}{1+2\cos x}$?

4 იპოვე მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin 5x$; ბ) $y=\cos 4x$; გ) $y=\mathrm{tg}3x$;

დ) $y=\sin 0{,}5x$; ე) $y=\mathrm{tg}(2x+3)$; ვ) $y=\sin x+\mathrm{tg}x$.

5 იპოვე მოცემული ფუნქციის პერიოდი:

ა) $f(x)=\sin(5-7x)$; ბ) $f(x)=5\sin\dfrac{1-4x}{3}$; გ) $f(x)=\cos\left(5-\dfrac{x}{3}\right)$.

6 იპოვე $\cos\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$ და $\pi<\alpha<1{,}5\pi$.

7 იპოვე $\sin\alpha$ და $\mathrm{tg}\alpha$, თუ $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ და $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$.

8 იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=-1$ და $0{,}5\pi<\alpha<\pi$.

9 იპოვე $\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha=-0{,}4$ და $\mathrm{tg}\alpha>0$.

10 იპოვე $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, თუ $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{15}$.

11 დაადგინე $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, თუ:

ა) $f(x)=2\sin x-1$; ბ) $f(x)=\sin^2x-1$; გ) $f(x)=2\sin^2x-\cos^2x$; დ) $f(x)=\mathrm{tg}^2x$.

12 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; ბ) $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha$; გ) $(1-\sin^2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha$; დ) $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;

ე) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; ვ) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$; ზ) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; თ) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

13 იპოვე ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin 5x+\cos 4x$; ბ) $y=\cos^2x$; გ) $y=|\sin x|$; დ) $y=\sin 2x+\mathrm{tg}4x$;

ე) $y=\sin^3x$; ვ) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}$; ზ) $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{tg}3x}+4\mathrm{tg}2x$; თ) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{2}$.

14 დაადგინე $y=\sin^2x-\sin x+1$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

15 მოცემულია $y=f(x)$ კენტი პერიოდული ფუნქცია 2-ის ტოლი პერიოდით, როცა $x\in[0;1]$, $f(x)=x^2-x$.

ა) გამოთვალე $f(-0{,}5)+f(1{,}5)$;

ბ) ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $[-3;3]$ შუალედში.

16 დაამტკიცე, რომ $y=\sin\sqrt{x}$ არაა პერიოდული ფუნქცია.

შესაძლებელია თუ არა?

რაიმე α არგუმენტისათვის შესრულდეს უტოლობა $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha>1$?

აბა, სცადე!

დაადგინე $y=\sin x+\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ქვიზი თვითშეფასებისათვის №3

1 გამოთვალე: $\sin(-240°)$.

ა) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; გ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; დ) $-\sqrt{3}$.

2 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა: $(\text{tg}30° + \text{tg}60°)^2$.

ა) $6\frac{3}{4}$; ბ) $5\frac{1}{3}$; გ) $-6\frac{3}{4}$; დ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

3 ქვემოთ მოცემულთაგან რომელ გამოსახულებას აქვს აზრი?

ა) $\frac{12}{\sin 2\pi}$; ბ) $\sqrt{\text{tg}145°}$; გ) $\sqrt{\cos 340°}$; დ) $4\text{tg}\frac{3\pi}{2}$.

4 იპოვე $\sin\alpha$, თუ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ და $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; დ) -1.

5 იპოვე გამოსახულების მნიშვნელობა: $\sin(-30°) + \cos(-60°) + \text{tg}(-45°)$.

ა) -1; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $-\sqrt{3}$; დ) 1.

6 გაამარტივე გამოსახულება: $\text{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \text{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

ა) $\sin\alpha$; ბ) $\cos\alpha$; გ) -1; დ) 0.

7 განსაზღვრე ნამრავლის ნიშანი.

$\sin 67° \cdot \cos 261° \cdot \cos 372° \cdot \sin(-75°) \cdot \cos(-72°)$

8 იპოვე ერთეულოვანი წრეწირის $P_{\frac{5\pi}{4}}$ წერტილის კოორდინატები.

9 იპოვე $y = 7 - 4\sin\alpha$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა.

10 შესაძლებელია თუ არა, რომ რაიმე α არგუმენტისთვის შესრულდეს ორივე ტოლობა:

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ და $\cos\alpha = \frac{2}{3}$? (პასუხი დაასაბუთე.)

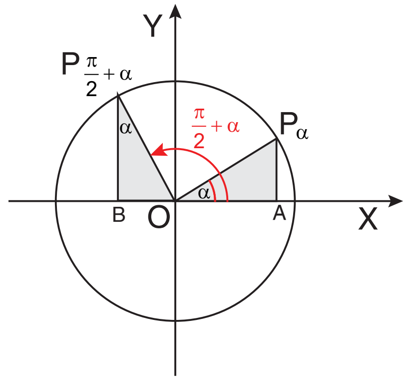
3.4 დაყვანის ფორმულები

მიზანი

დაყვანის ფორმულების გაცნობა და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოსათვლელად გამოყენება.

შევისწავლოთ ფორმულები, რომელთა გამოყენებით ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა შეიძლება $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლაზე დავიყვანოთ. ამ ფორმულებს **დაყვანის ფორმულები** ეწოდება. მოვიყვანოთ ეს ფორმულები:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$
3. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\quad \mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha;$
4. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha;$
5. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha};$
6. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$



დავამტკიცოთ, მაგალითად 1-ელი ფორმულები იმ შემთხვევში, როცა α არგუმენტი აკმაყოფილებს $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ პირობას.

განმარტების თანახმად, ნახაზზე მოცემული P_α წერტილის კოორდინატებია $\cos\alpha$ და $\sin\alpha$, ხოლო $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ წერტილის კოორდინატები – $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ და $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. $P_\alpha AO$ და $OBP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ სამკუთხედების ტოლობიდან მივიღებთ:

$OB=AP_\alpha$, ანუ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ და $BP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}=AO$, ანუ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

დაყვანის ფორმულაში ტოლობის მარცხენა ნაწილს დასაყვანი ფუნქცია ვუწოდოთ, ხოლო მარჯვენას – დაყვანილი. 1-6 ტოლობებზე დაკვირვების შედეგად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დასკვნა:

- თუ დასაყვანი ფუნქციის არგუმენტი $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ -ს ან $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ -ს შეიცავს (ანუ $\frac{\pi}{2}$ კენტჯერაა აღებული), მაშინ დასაყვანი ფუნქცია იცვლება: კოსინუსი იცვლება სინუსით, სინუსი – კოსინუსით;
- თუ დასაყვანი ფუნქციის არგუმენტია $\pi\pm\alpha$, მაშინ დასაყვანი ფუნქცია არ იცვლის სახელწოდებას;
- დაყვანილი ფუნქციის ნიშნის დასადგენად უნდა ჩავთვალოთ, რომ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ და დაყვანილ ფუნქციას დავუწეროთ დასაყვანი ფუნქციის ის ნიშანი, რომელიც მას აქვს მოცემული არგუმენტისთვის.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ: ა) $\cos\frac{7\pi}{6}$; ბ) $\sin 10,75\pi$; გ) $\mathrm{tg}23\frac{2}{3}\pi$.

ამოხსნა.

ა) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ბ) $\sin 10,75\pi=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

გ) $\mathrm{tg}23\frac{2}{3}\pi=\mathrm{tg}\left(23\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$.

დაყვანის ფორმულებით გრადუსებში მოცემული არგუმენტის შემთხვევაშიც შეგვიძლია ვისარგებლოთ. ამ დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ π რადიანი =180°.

მაგალითი 2. დავიყვანოთ მახვილი კუთხის ფუნქციაზე:

ა) $\cos 1640^\circ$; ბ) $\sin 140^\circ$; გ) $\mathrm{tg}280^\circ$.

ამოხსნა.

ა) კოსინუსის პერიოდულობის თვისების თანახმად:

$\cos 1640^\circ=\cos(360^\circ\cdot 4+200^\circ)=\cos 200^\circ$.

დაყვანის ფორმულის გამოყენებით ვწერთ: $\cos 200^\circ=\cos(180^\circ+20^\circ)=-\cos 20^\circ$.

ბ) $\sin 140^\circ=\sin(180^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$.

გ) $\mathrm{tg}500^\circ=\mathrm{tg}(2\cdot 180^\circ+140^\circ)=\mathrm{tg}140^\circ=\mathrm{tg}(180^\circ-40^\circ)=-\mathrm{tg}40^\circ$.

როცა დასაყვანი ფუნქცია ლუწ ხარისხშია, მის ნიშანზე ზრუნვა აღარ გვიწევს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ: ა) $\sin^2 240^\circ$; ბ) $\sin^4(-1320^\circ)$.

ამოხსნა. ა) $\sin^2 240^\circ=\sin^2(180^\circ+60^\circ)=\sin^2 60^\circ=\frac{3}{4}$

ბ) $\sin^4(-1320^\circ)=\sin^4 1320^\circ=\sin^4(360^\circ\cdot 3+240^\circ)=\sin^4 240^\circ=\sin^4(180^\circ+60^\circ)=\sin^4 60^\circ=\frac{9}{16}$;

მაგალითი 4. გავამარტივოთ გამოსახულება: $\frac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)}$.

ამოხსნა. $\frac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{-\mathrm{tg}\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}}{\cos\alpha}=1$.

პასუხი: 1.

უპასუხე კითხვებს:

1) რაში ვიყენებთ დაყვანის ფორმულებს?
2) რა შემთხვევაში არ შეიცვლება დასაყვანი ფუნქცია დაყვანის შემდეგ?
3) როგორ უნდა დავადგინოთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებისას ფუნქციის ნიშანი?

სავარჯიშოები

1 დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; ბ) $\sin(\pi-\alpha)$; გ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

დ) $\cos(3\pi+\alpha)$; ე) $\operatorname{tg}(3{,}5\pi+\alpha)$; ვ) $\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)$.

2 დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin(360°-\alpha)$; ბ) $\sin(270°-\alpha)$; გ) $\cos(180°-\alpha)$;

დ) $\cos(90°+\alpha)$; ე) $\operatorname{tg}(360°-\alpha)$.

3 დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin(\alpha+90°)$; ბ) $\cos(\alpha-\pi)$; გ) $\operatorname{tg}(\alpha-360°)$;

დ) $\sin^2(\alpha-\pi)$; ე) $\operatorname{tg}^2(\alpha-270°)$.

4 გაამარტივე გამოსახულება: $\sin(\alpha-90°)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)$.

5 მოცემული ფუნქცია დაიყვანე $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში მოთავსებული არგუმენტის ფუნქციაზე:

ა) $\sin0{,}8\pi$; ბ) $\cos3{,}1\pi$; გ) $\operatorname{tg}4{,}7\pi$; დ) $\operatorname{tg}2{,}8\pi$.

6 დაიყვანე ფუნქცია 45°-ზე ნაკლები დადებითი კუთხის ფუნქციაზე:

ა) $\sin485°$; $\sin875°$; $\sin(-5108°)$;

ბ) $\cos1025°$; $\cos(-1694°)$; $\cos(-815°)$;

გ) $\operatorname{tg}869°$; $\operatorname{tg}(-1759)°$; $\operatorname{tg}(-917°)$.

7 იპოვე $[0;360°)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა სინუსია:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) -1.

8 იპოვე $[0;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა კოსინუსია:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) -1.

9 იპოვე $[0;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა ტანგენსია:

ა) $\sqrt{3}$; ბ) 0; გ) -1.

10 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin(180°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(90°-\alpha)$; ბ) $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}$; გ) $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\cos(180°+\alpha)}$;

დ) $\sin(90°-\alpha)+\sin(90°+\alpha)+2\cos(180°-\alpha)$; ე) $\dfrac{\cos^2(90°-\alpha)-1}{\cos(180°-\alpha)}$;

ვ) $\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)+\cos(180°+\alpha)$;

ზ) $\sin(180°-\alpha)+\sin(270°+\alpha)+2\cos(360°-\alpha)$;

თ) $\cos(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}(90°+\alpha)}$.

11 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$; ბ) $\sin(\alpha-15\pi)\cos(\alpha+\pi)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

გ) $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\pi-\alpha)}$; დ) $\dfrac{2\sin(-3825°)-\sin1215°}{\cos(-1260°)}$.

12 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4\sin120°\cdot\operatorname{tg}300°$; ბ) $8\sin510°\cdot\cos(-300°)\cdot\operatorname{tg}240°$;

გ) $2\sin^2 225°-\dfrac{\operatorname{tg}405°}{\operatorname{tg}330°}$; დ) $\dfrac{10}{\operatorname{tg}315°}\cdot\sin(-150°)\cdot\cos225°$;

ე) $\dfrac{\cos(-120°)}{\cos300°}-\dfrac{\operatorname{tg}210°\sin315°}{\cos180°}$.

13 გამოთვალე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{\operatorname{tg}(-150°)\cdot\cos(-210°)\cdot\cos(-60°)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}(-240°)}\cdot\sin(-330°)}$; ბ) $\dfrac{2\sin660°-\sin630°}{\dfrac{3}{\operatorname{tg}1020°}+2\cos(-660°)}$;

გ) $\sin(450°+\beta)-\sin(270°-\beta)-\sin(450°-\beta)+\sin(270°+\beta)$.

14 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\dfrac{\cos(180°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(90°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(90°+\alpha)}$; ბ) $\dfrac{2\sin3290°-\sin1490°}{2\operatorname{tg}585°}$.

15 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(3\pi+\alpha)=0$;

ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\mathrm{tg}\alpha$;

გ) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$;

დ) $\sin(\alpha-\pi)+\mathrm{tg}(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha$; ე) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}}=-1$.

16 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\sin(\beta-\pi)\mathrm{tg}(\beta+\pi)+\frac{1}{\cos(\beta-2\pi)}=\cos\beta$;

ბ) $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=1$;

გ) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(270^\circ-\alpha)\cdot\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(360^\circ-\alpha)}=-\cos\alpha$;

დ) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}+\mathrm{tg}(\pi-\alpha)+\cos 0=0$;

17 გამოთვალე:

ა) $\cos^2\frac{77\pi}{4}$; ბ) $\sin^2\left(7\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; გ) $\mathrm{tg}^2\left(3{,}5\pi-\frac{\pi}{3}\right)$.

18 მოცემულია: $\sin(180^\circ+\alpha)=-\frac{1}{2}$, გამოთვალე:

ა) $\sin^2(270^\circ+\alpha)$; ბ) $\cos^2(90^\circ+\alpha)$.

19 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin^2(4\pi-\alpha)+\sin^2(4{,}5\pi+\alpha)$; ბ) $1+\cos(7\pi+\alpha)+\cos(\alpha-4\pi)$;

გ) $\sin^2(5\pi+\alpha)+2\sin(2{,}5\pi+\alpha)\cdot\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\cos^2(4\pi-\alpha)$;

დ) $\sin^2(\alpha-270^\circ)+\cos^2(270^\circ+\alpha)-2\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)$.

20 იპოვე:

ა) $\sin 207^\circ$ თუ $\sin 27^\circ=a$; ბ) $\cos 304^\circ$ თუ $\sin 34^\circ=a$;

გ) $\mathrm{tg}106^\circ$ თუ $\sin 16^\circ=a$; დ) $\cos\alpha$ თუ $\cos(180^\circ-\alpha)=a$;

21 მოცემული ფუნქცია დაიყვანე შესაძლო უმცირესი დადებითი არგუმენტის ფუნქციაზე:

ა) $\sin\frac{10\pi}{9}$; ბ) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10}$; გ) $\cos 10$; დ) $\sin 11$.

22 დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$; ბ) $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$;

გ) $\sin(60°+\alpha)=\cos(30°-\alpha)$.

23 დაამტკიცე უტოლობა: $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geq 1$.

24 გამოთვალე:

ა) $\operatorname{tg}20°+\operatorname{tg}40°+...+\operatorname{tg}160°+\operatorname{tg}180°$;

ბ) $\sin 395°\cdot\sin 505°-\cos 575°\cdot\cos 685°+\operatorname{tg}606°\cdot\operatorname{tg}1104°$;

გ) $\operatorname{tg}10°\cdot\operatorname{tg}20°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}40°\cdot\operatorname{tg}50°\cdot\operatorname{tg}60°\cdot\operatorname{tg}70°\cdot\operatorname{tg}80°$.

25 რომელია მეტი:

ა) $\sin 25°$ თუ $\sin 27°$? ბ) $\sin 100°$ თუ $\sin 110°$?

გ) $\cos 15°$ თუ $\cos 25°$? დ) $\operatorname{tg}15°$ თუ $\operatorname{tg}55°$?

26 რომელ მეოთხედებში სრულდება უტოლობა:

ა) $\sin\alpha<0$? ბ) $\operatorname{tg}\alpha>0$? გ) $\cos\alpha>0$? დ) $\cos\alpha<0$?

3.5 y=sin x ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი

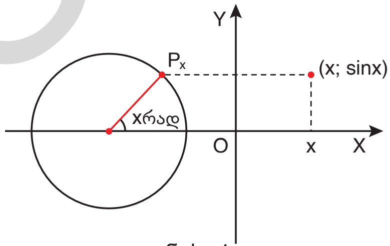
- **y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება;**
- **y=sinx ფუნქციის თვისებების შეჯამება**

როგორც ვიცით, y=sinx ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რაც ნიშნავს, რომ x არგუმენტს ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია.

y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება სხვადასხვა გზითაა შესაძლებელი.

როგორც აქამდე, სხვა ფუნქციების გრაფიკების აგებისას, ახლაც შესაძლებელია გრაფიკი ავაგოთ შემდეგი წესით: ვისარგებლებთ რა sinx-ის მნიშვნელობათა ცხრილით, საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგებთ (x; sinx) წერტილებს არგუმენტისა და ფუნქციის ჩვენთვის ცნობილი მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ ამ წერტილებზე გავავლებთ გლუვ, უწყვეტ წირს.

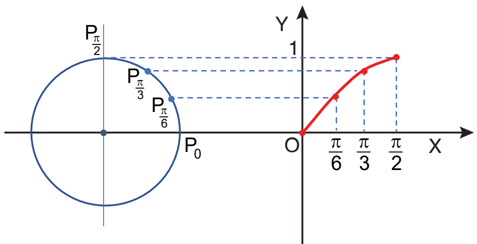
შედარებით მარტივია გრაფიკის აგების გეომეტრიული ხერხი. ეს ხერხი ემყარება სინუსის ჩვენ მიერ 1.2 პარაგრაფში ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით მოყვანილ განმარტებას. მის საილუსტრაციოდ ერთეულოვანი წრის ცენტრი მოვათავსოთ აბსცისათა ღერძის რაიმე წერტილში. ნებისმიერი x არგუმენტისათვის ერთეულოვან წრეწირზე მოვძებნოთ P_x წერტილი, რომელიც მიიღება P_0 წერტილის x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით. ამ წერტილიდან გავატაროთ აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე x წერტილზე გამავალ ორდინატთა ღერძის პარალელურ წრფესთან გადაკვეთამდე (ნახ.1). მიღებული გადაკვეთის წერტილი, კოორდინატებით (x; sinx), იქნება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. როცა x წერტილს ვამოძრავებთ აბსცისათა ღერძზე, P_x იმოძრავებს ერთეულოვან წრეწირზე, ხოლო შესაბამისი (x; sinx) კოორდინატების მქონე წერტილი შემოწერს y=sinx ფუნქციის გრაფიკს.



ნახ. 1

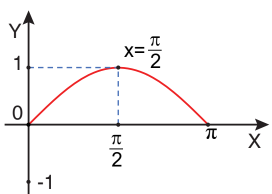
გრაფიკის პრაქტიკულად ასაგებად პირველ ეტაპზე ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით ავაგოთ იგი $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ხოლო შემდეგ სინუსის თვისებების გამოყენებით განვავრცოთ მთელ რიცხვით ღერძზე.

ამისათვის $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში ავიღოთ რამდენიმე არგუმენტი, ზემოთ აღწერილი მეთოდით მოვნიშნოთ ამ არგუმენტების შესაბამისი გრაფიკის წერტილები და შევაერთოთ წირით. (გასაგებია, რომ, რაც მეტ წერტილს მოვნიშნავთ, მით ზუსტი იქნება გრაფიკი). მე-2 ნახაზზე $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედის შესაბამისი გრაფიკი მიღებულია გრაფიკზე მონიშნული 4 წერტილის შეერთებით.



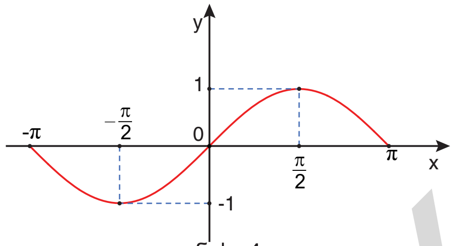
ნახ. 2

დაყვანის ფორმულის ძალით $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ შუალედში (ნახ.3) გრაფიკი სიმეტრიულია $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აგებული გრაფიკისა $x=\frac{\pi}{2}$ წრფის მიმართ.



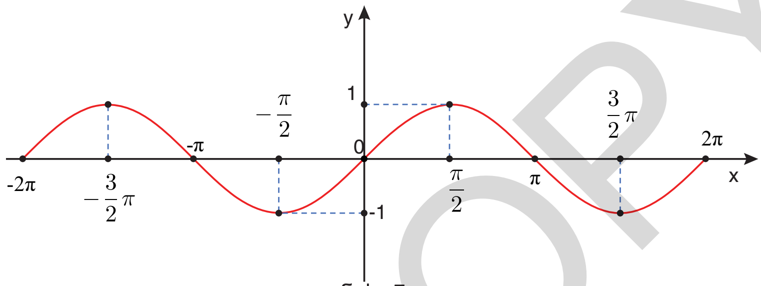
ნახ. 3

თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ სინუსი კენტი ფუნქციაა და ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ ცენტრული სიმეტრიით მივიღებთ გრაფიკს $[-\pi;0]$ შუალედში (ნახ.4).



ნახ. 4

და ბოლოს, იმის გამო, რომ y=sinx პერიოდული ფუნქციაა 2π პერიოდით, $[-\pi;\pi]$ შუალედში მოცემული გრაფიკის $(2\pi k;0)$, $k\in Z$ კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით მივიღებთ ფუნქციის გრაფიკს მთელ ღერძზე (ნახ.5).



ნახ. 5

მთელი გრაფიკი მოქცეულია ზოლში, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისათა ღერძის პარალელური y=1 და y=–1 წრფეებით.

გავიხსენოთ y=sinx ფუნქციის რა თვისებებიც ვიცით და გრაფიკზე დაკვირვებით ჩამოვაყალიბოთ მისი ძირითადი თვისებები:

1) y=sinx ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

2) მნიშვნელობათა სიმრავლეა [-1; 1] შუალედი;

3) ფუნქცია კენტია: $\sin(-x)=-\sin x$ ნებისმიერი $x\in R$-თვის. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;

4) ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ნებისმიერი $x\in R$-თვის;

5) ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია $x_{max}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,$ ხოლო მაქსიმუმია $y_{max}=1$;

6) ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $x_{min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,$ ხოლო მინიმუმია $y_{min}=-1$;

7) $\sin x=0$, როცა $x=\pi k,\ k\in Z$;

8) $\sin x>0$, როცა $x\in(2\pi k,\ \pi+2\pi k),\ k\in Z$;

9) $\sin x<0$, როცა $x\in(\pi+2\pi k,\ 2\pi+2\pi k),\ k\in Z$;

10) ფუნქცია ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$ შუალედებში და კლებადია $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$ შუალედებში.

უპასუხე კითხვებს:

1) როგორ გავარკვიოთ გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის ლუწ-კენტობა?

2) $[0;2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=sinx კლებადი ფუნქცია? ზრდადი?

3) რამდენი ნული აქვს y=sinx ფუნქციას $[0;2\pi]$ შუალედში?

4) $[0;2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=sinx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?

5) რა ზოლში იქნება მოთავსებული y=2sinx ფუნქციის გრფიკი?

6) აქვს თუ არა y=sinx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ცენტრი? სიმეტრიის ღერძი?

სავარჯიშოები

1 იპოვე y=2sinx ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

2 მოცემული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი და რომელი კენტი?
ა) $y=\sin^2 x$; ბ) $y=\sin^3 x$; გ) y=2sinx–3x; დ) $y=x^2-\sin x$.

3 y=sinx ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით გაარკვიე, $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$ ინტერვალიდან რომელი რიცხვის სინუსია: ა) 0,5-ის ტოლი; ბ) –1-ის ტოლი; გ) 1-ის ტოლი.

4 y=sinx ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვე:
ა) $\sin 15°$-ის; ბ) $\sin 50°$-ის; გ) sin1-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა კალკულატორის გამოყენებით.

5 y=sinx ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დაადგინე, რომელია მეტი:
ა) sin 1 თუ sin 2; ბ) $\sin\frac{\pi}{5}$ თუ $\sin\frac{\pi}{3}$;
გ) $\sin\frac{3\pi}{5}$ თუ $\sin\frac{4\pi}{5}$; დ) $\sin\frac{5\pi}{6}$ თუ $\sin\frac{6\pi}{5}$.

6 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის, მაგალითად Geogebra-ს გამოყენებით:
ა) y=sin2x; ბ) $y=\sin\frac{x}{2}$; გ) y=sin4x; დ) y=2sin2x.

7 ააგე y=sinx ფუნქციის გრაფიკი და მასზე მიუთითე გრაფიკის:
ა) სიმეტრიის ცენტრები; ბ) სიმეტრიის ღერძები.

8 ააგე y=–sinx ფუნქციის გრაფიკი.

9 ააგე ფუნქციის გრაფიკი: ა) $y=\sin(x+\pi)$; ბ) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

10 დაადგინე y=sin2x ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები.

11 მოძებნე $y=\sin 3x$ ფუნქციის $[-\pi;\pi]$ შუალედში მოთავსებული ნულები.

12 დაალაგე ზრდის მიხედვით: $\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{4}$; $\sin\frac{\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{2}$.

13 იპოვე $y=f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ:

ა) $f(x)=2+\sin x$; ბ) $f(x)=1-\sin^2 x$;

გ) $f(x)=\dfrac{1}{2+\sin x}$; დ) $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos^2 x}$.

14 გამოთვალე $y=\sin\pi x$ ფუნქციის $(0;10)$ შუალედში არსებული ნულების ჯამი.

15 მოძებნე: $y=4\sin^2 x-5\cos^2 x+1$ ფუნქციის:

ა) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები; ბ) ექსტრემუმის წერტილები.

16 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=|\sin x|$; ბ) $y=\sin|x|$;

17 იპოვე $\sin x=0,5$ განტოლების $[-2\pi;2\pi]$ შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნი.

18 იპოვე: ა) $f(x)=\cos(3x+7)$; ბ) $f(x)=\cos\left(5-\frac{x}{3}\right)$ ფუნქციის პერიოდი.

19 იპოვე $\cos\alpha$, თუ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=a$.

20 მოცემულია $\cos 27^\circ=a$. იპოვე:

ა) $\cos(-27^\circ)$; ბ) $\cos 153^\circ$; გ) $\sin 117^\circ$; დ) $\cos 207^\circ$; ე) $\sin 153^\circ$.

3.6 y=cosx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

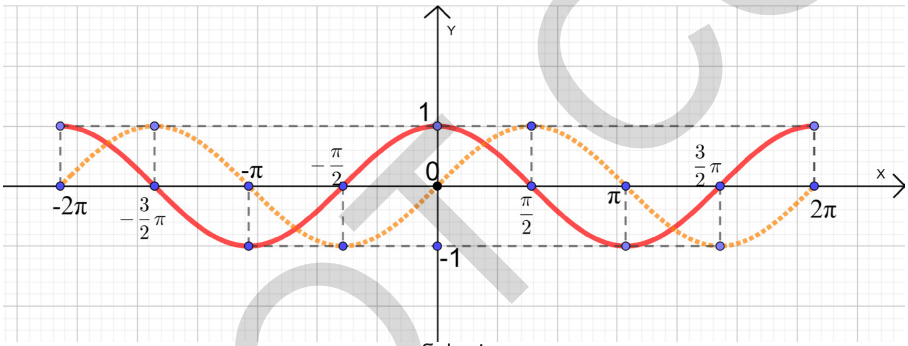
მიზანი

- **y=cosx ფუნქციის თვისებების შესწავლა;**
- **y=cosx ფუნქციის გრაფიკის აგება**

ვიცით y=cosx ფუნქციის ზოგიერთი თვისება და $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება. ამ ცოდნაზე დაყრდნობითა და $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკს.

დაყვანის ფორმულის თანახმად, x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

მაშასადამე, $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს აბსცისათა ღერძზე $\frac{\pi}{2}$-ით მარცხნივ გადაწეული სინუსოიდა. $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკს **კოსინუსოიდა** ეწოდება (ნახ.1)



ნახ. 1

ცხადია, $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება შესაძლებელია საერთო წესითაც, ანუ cosx -ის ცხრილის გამოყენებით ისე, როგორც სინუსოიდის აგებისას. შესაძლებელია აგრეთვე, ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებითაც.

ჩამოვაყალიბოთ $y = \cos x$ ფუნქციის თვისებები.

1) განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
2) მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] შუალედი;
3) ლუწი ფუნქციაა, ნებისმიერი $x \in R$ -თვის cos(–x)=cosx. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ;
4) ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, ნებისმიერი $x \in R$ -თვის;
5) ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია $x_{max} = 2\pi k,\ k \in Z$, ხოლო მაქსიმუმია $y_{max} = 1$; ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $x_{min} = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$, ხოლო მინიმუმია $y_{min} = -1$;
6) cosx=0, როცა $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;
7) cosx>0, როცა $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z$;

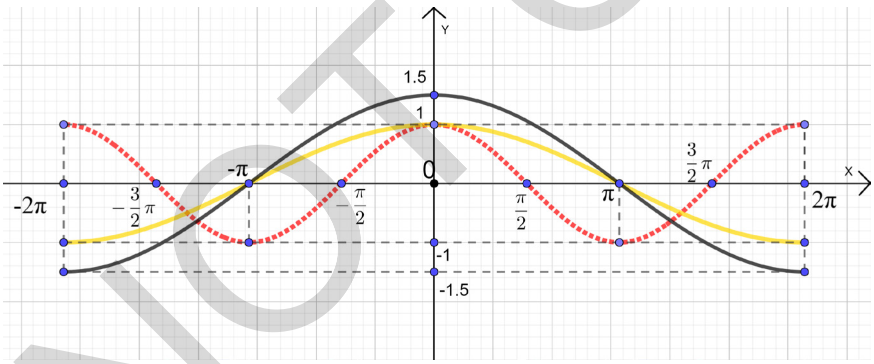
8) cosx<0, როცა $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k \in Z$;

9) ფუნქცია ზრდადია $[-\pi+2\pi k; 2\pi k], k \in Z$ შუალედებში და კლებადია $[2\pi k; \pi+2\pi k], k \in Z$ შუალედებში.

მაგალითი 1. ავაგოთ $y = 1{,}5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ვიცით როგორ ავაგოთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკი. იმის გამო, რომ $y = \cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის პერიოდი 2-ჯერ მეტია y=cosx ფუნქციის პერიოდზე, მისი „ტალღის" სიგრძე იქნება 2-ჯერ მეტი. ამიტომ, თუ y=cosx ფუნქციის გრაფიკს გავჭიმავთ აბსცისათა ღერძის გასწვრივ 2-ჯერ, მივიღებთ $y = \cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს.

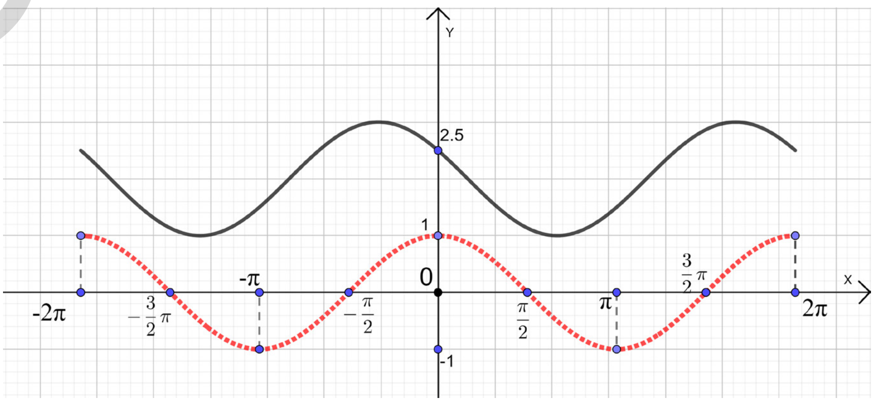
$y = 1{,}5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-1{,}5; 1{,}5]$, ამიტომ $y = \cos\frac{x}{2}$-ის მი-ღებული გრაფიკი უნდა გავჭიმოთ 3-ჯერ ორდინატთა ღერძის გასწვრივ და მივიღებთ $y = 1{,}5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს.



ნახ. 2

მაგალითი 2. ავაგოთ $y = 2+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ავაგოთ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკი. შემდეგ გრაფიკი გადავიტანოთ $\frac{\pi}{3}$-ით მარცხნივ და 2-ით ზემოთ.



ნახ. 3

უპასუხე კითხვებს:

1) რომელი საკოორდინატო ღერძის მიმართ არის სიმეტრიული y=cosx ფუნქციის გრაფიკი?

2) რა კავშირია y=sinx და y=cosx ფუნქციების გრაფიკებს შორის?

3) $[0; 2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=cosx ზრდადი ფუნქცია? კლებადი?

4) რამდენი ნული აქვს y=cosx ფუნქციას $[0; 2\pi]$ შუალედში?

5) აქვს თუ არა y=cosx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ცენტრი?

6) $[0; 2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=cosx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?

7) რა არის y=cosx ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი მნიშვნელობა?

8) რა ზოლში იქნება მოთავსებული y=3cosx ფუნქციის გრაფიკი?

სავარჯიშოები

1 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:
ა) $y=0,5\cos x$; ბ) $y=3\cos x$.

2 ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:
ა) $y=-\cos x$; ბ) $y=\cos x+1$.

3 ააგე პროგრამა „Geogebra“-ს გამოყენებით $y=\cos 2x$ და $y=\cos 0,5x$ ფუნქციების გრაფიკები და იმსჯელე მათს მსგავსება-განსხვავებაზე.

4 ააგე $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ და $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციების გრაფიკები და იმსჯელე მათს მსგავსება-განსხვავებაზე/

5 ააგე $y=1+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი და შეადარე $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკს.

6 ააგე $y=|\cos x|$ და $y=\cos|x|$ ფუნქციების გრაფიკები რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის გამოყენებით და შეადარე ერთმანეთს. შედეგად ჩამოაყალიბე შესაბამისი დასკვნა.

7 $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით განსაზღვრე, $[0;2\pi]$ შუალედის რომელი არგუმენტებისთვის არის $y=\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობა:

ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) -1; დ) 0.

8 $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დაადგინე, რომელია მეტი:

ა) cos1 თუ cos 2; ბ) $\cos\frac{\pi}{5}$ თუ $\cos\frac{\pi}{3}$;

გ) $\cos\frac{3\pi}{5}$ თუ $\cos\frac{4\pi}{5}$; დ) $\cos\frac{5\pi}{6}$ თუ $\cos\frac{7\pi}{3}$.

9 დაალაგე კლების მიხედვით: $\cos\frac{\pi}{3}$; $\cos\frac{4\pi}{3}$; $\cos\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{\pi}{6}$; $\cos\frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{3\pi}{2}$.

10 დაადგინე $y=\cos 2x$ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები.

11 გრაფიკის მიხედვით დაადგინე, $(-\pi;\pi)$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზე სრულდება $\cos x>0$ უტოლობა.

12 იპოვე $y=f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ:

ა) $f(x)=1+2\cos x$; ბ) $f(x)=2-\cos^2 x$;

გ) $f(x)=\dfrac{1}{3-\cos x}$; დ) $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$.

13 მოძებნე $y=\cos 3x$ ფუნქციის $[-\pi;\pi]$ შუალედში მოთავსებული ნულები.

14 მოძებნე: $y=3\cos^2 x-4\sin^2 x+2$ ფუნქციის:

ა) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები;
ბ) ექსტრემუმის წერტილები.

15 იპოვე $\cos x=0,5$ განტოლების $[-2\pi;2\pi]$ შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნი.

16 იპოვე $\cos\pi x=1$ განტოლების $[0;10]$ შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნის ჯამი.

17 მოცემულია $\mathrm{tg}\alpha=5$. გამოთვალე:

ა) $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)$; ბ) $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)$;

გ) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; დ) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

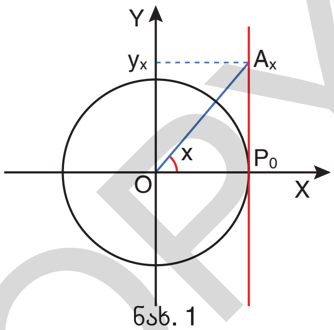
18 არგუმენტის რა მნიშვნელობებისთვის არაა განსაზღვრული $y=\mathrm{tg}x$ ფუნქცია $(0;2\pi)$ შუალედში?

3.7 y=tgx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

y=tgx ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

მიზანი

განმარტების თანახმად $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$. ამ განმარტებაში იგულისხმება, რომ $\cos x\neq 0$, ანუ $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. ე.ი. ტანგენსის განსაზღვრის არე არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს გამოკლებული $\frac{\pi}{2}+\pi k$ სახის რიცხვების სიმრვალე, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.



ნახ. 1

ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლის დასადგენად ერთეულოვანი წრეწირის P_0 წერტილზე გავავლოთ ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე (1-ელ ნახაზზე A_xP_0 წრფე). ამ წრფეს **ტანგენსების წრფე** ეწოდება.

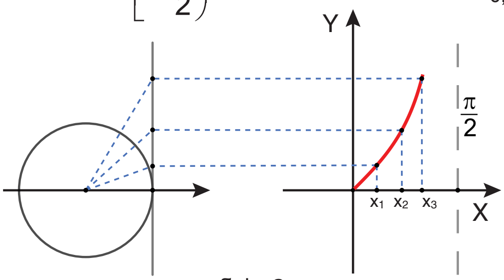
ნახაზიდან ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ არგუმენტისათვის

$tgx=\frac{A_xP_0}{OP_0}=\frac{A_xP_0}{1}=y_x$, სადაც y_x არის A_x წერტილის ორდინატა.

თუ x არგუმენტს ვამოძრავებთ $-\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ A_x წერტილი გაირბენს ტანგენსების წრფეს, ხოლო მისი y_x კოორდინატი – მთელ რიცხვით ღერძს $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. აქედან ვასკვნით, რომ y=tgx ზრდადი ფუნქციაა $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და ამ შუალედში მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეა.

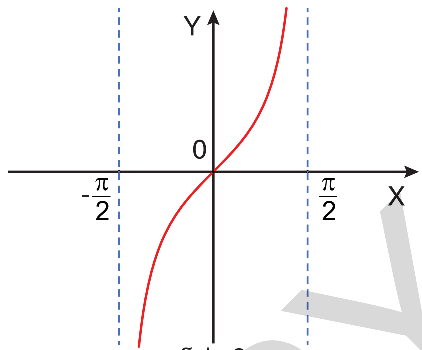
იმის გამო, რომ y=tgx კენტი ფუნქციაა, მისი გრაფიკის $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ასაგებად საკმარისია გრაფიკი ავაგოთ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და კოორდონატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით გავავრცოთ $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ შუალედზე.

გრაფიკის ასაგებად ვიყენებთ ტანგენსების წრფეს (ნახ.2). $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ვიღებთ $x_0, x_1, \dots x_n$ რიცხვებს, ერთეულოვან წრეზე P_0 წერტილის $x_0, x_1, \dots x_n$ რადიანებით მობრუნებით მიღებულ წერტილებს, ხოლო ტანგენსების წრფეზე მათი შესაბამისი წერტილებიდან ვავლებთ აბსცისთა ღერძის პარალელურ წრფეებს, $x_0, x_1, \dots x_n$ წერტილებიდან ორდინატთა ღერძის პარალელურად გავლებული წრფეების გადაკვეთამდე. კვეთაში მიღე-



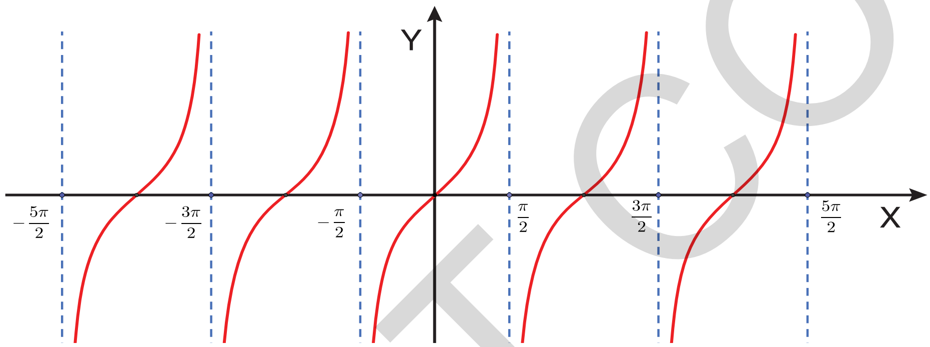
ნახ. 2

ბული წერტილები იქნება გრაფიკის წერტილები. ამ წერტილების გლუვი უწყვეტი წირით შეერთებისას მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში. ამ გრაფიკის ცენტრული სიმატრიით მივიღებთ გრაფიკს $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში (ნახ.3), რომელსაც ტანგენსის გრაფიკის **მთავარი შტო** ეწოდება.



ნახ. 3

იმის გამო, რომ გრაფიკი π სიგრძის შუალედში უკვე აგებული გვაქვს და π რიცხვი ტანგენსის პერიოდია, მიღებული გრაფიკის (πk;0) კოორდინატებიანი პარალელური გადატანებით, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს მთელ მის განსაზღვრის არეში (ნახ. 4).



ნახ.4

ჩამოვაყალიბოთ y=tgx ფუნქციის თვისებები:

1) განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ სახის რიცხვებისა;

2) მნიშვნელობათა სიმრავლეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R;

3) კენტი ფინქციაა, tg(–x)=–tgx, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;

4) პერიოდული ფუნქციაა. უმცირესი დადებითი პერიოდია π;

5) ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმის წერტილები;.

6) tgx=0, როცა $x=\pi k,\ k\in Z$;

7) tgx>0, როცა $x\in\left(\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in Z$;

8) tgx<0, როცა $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi k\right),\ k\in Z$;

9) ფუნქცია ზრდადია $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$ შუალედებში. კლებადი არაა განსაზღვრის არის არცერთ შუალედში.

უპასუხე კითხვებს:

1) რა ცენტრის მიმართაა სიმეტრიული ტანგენსის გრაფიკი?
2) რა არის ტანგენსის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
3) როგორ ავაგოთ ტანგენსხების წრფე?
4) $[0;\ 2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეებზეა y=tgx ზრდადი ფუნქცია? კლებადი?
5) რამდენი ნული აქვს y=tgx ფუნქციას $[-2\pi;\ \pi]$ შუალედში?
6) აქვს თუ არა y=tgx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ღერძი?
7) $[-\pi;\ \pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=tgx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?
8) აქვს თუ არა y=tgx ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი მნიშვნელობა?

სავარჯიშოები

1 ააგე y=tgx ფუნქციის გრაფიკი რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის გამოყენებით და მისი დახმარებით დაადგინე, რომელია მეტი:
ა) tg1 თუ tg0,5?; ბ) tg10° თუ tg0,5; გ) $tg\frac{\pi}{4}$ თუ $tg\frac{\pi}{6}$; დ) tg10° თუ tg15°.

2 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით დაადგინე ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როცა:
ა) x=1; ბ) x=0,3; გ) $x=\frac{\pi}{5}$; დ) x=2; ე) x=0,3; ვ) $x=\frac{2\pi}{3}$; ზ) x=1,5.

3 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tgx=1 განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც მოთავსებულია: ა) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; ბ) $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ შუალედში.

4 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tgx=0 განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც მოთავსებულია $[-2\pi;2\pi]$ შუალედში.

5 y=tgx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tgx<0 უტოლობის ყველა ის ამონახსნი, რომლებიც $(-\pi;\ \pi)$ შუალედს ეკუთვნის.

6 გაარკვიე, მოცემული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი და რომელი კენტი:
ა) $y=tg^2x+3$; ბ) y=3sin2x+2tg3x; გ) $y=|tgx|$; დ) $y=tg(\pi-x)$; ე) y=cosx+tgx.

7 იპოვე tgx=tg(–x) განტოლების ყველა ამონახსნი.

8 ააგე ა) $y=|tgx|$; ბ) $y=tg|x|$ ფუნქციის გრაფიკი.

9 გაამარტივე გამოსახულება:
ა) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; ბ) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;
გ) $(tg\alpha+tg^{-1}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

10 იპოვე x არგუმენტი (–90°;90°) შუალედიდან, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:
ა) sinx=0,5; ბ) sinx=–0,5; გ) sinx=0; დ) tgx=0; ე) $tgx=\sqrt{3}$; ვ) $tgx=-\sqrt{3}$.

11 იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $tg\alpha=0{,}75$.

ქვიზი თვითშეფასებისათვის №4

ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, მათი თვისებები და გრაფიკები

1 ლუწია თუ კენტი $f(x)=2-4\cos\frac{x}{3}$ ფუნქცია?

ა) ლუწია; ბ) კენტია; გ) არც ლუწია და არც კენტი; დ) გაურკვეველია.

2 $f(x)=-0{,}5\cos x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა:

ა) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; ბ) $(-\infty;\ +\infty)$; გ) $(0;+\infty)$; დ) $(-\infty;\ 0{,}5)$.

3 $f(x)=\sin^2 x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა:

ა) $(0;\ 1)$; ბ) $(-\infty;\ +\infty)$; გ) $[0;1]$; დ) $(-\infty;\ 1)$.

4 იპოვე $f(x)=\cos 2x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

ა) π; ბ) 2π; გ) 3π; დ) $\frac{\pi}{2}$.

5 თუ $\cos\alpha=a$, მაშინ რის ტოლია $\sin(270^{\circ}-\alpha)$?

ა) $\sqrt{1-a^2}$; ბ) $-\sqrt{1-a^2}$; გ) a; დ) $-a$.

6 რომელი უტოლობაა მართებული?

ა) $\sin\frac{\pi}{12}>\sin\frac{\pi}{6}$; ბ) $\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{6}$; გ) $\cos\frac{\pi}{12}<\cos\frac{\pi}{6}$; დ) $\sin\frac{\pi}{12}\geq\cos\frac{\pi}{6}$.

7 იპოვე $f(x)=2\sin x+1$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები.

8 გამოთვალე: $\mathrm{tg}40^{\circ}\cdot\mathrm{tg}50^{\circ}+\sin20^{\circ}:\cos70^{\circ}$.

9 გაამარტივე: $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

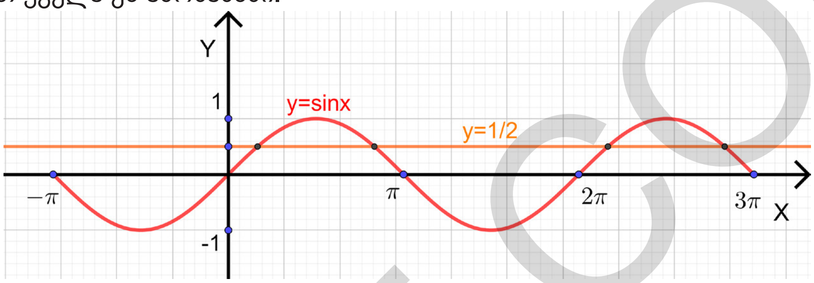
10 მოცემულია, $y=f(x)$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ლუწი პერიოდული ფუნქცია, პერიოდით 3. f(8)=11. გამოთვალე f(1)+f(11).

3.8 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა

მიზანი — დავადგინოთ sinx=a, cosx=a და tgx=a განტოლებათა ამონახსნები

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sin x = \frac{1}{2}$ განტოლების ყველა ამონახსნი.

ამოხსნა: ავაგოთ y=sinx და $y = \frac{1}{2}$ ფუნქციათა გრაფიკები. ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნები. როგორც პირველი ნახაზიდან ვრწმუნდებით, განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს. ჩვენი მიზანია, რაიმე ფორმულით აღვწეროთ ყველა ეს ამონახსნი.



ნახ. 1

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $\sin x = \frac{1}{2}$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, $x = \frac{\pi}{6}$. დაყვანის ფორმულის ძალით $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში გვექნება კიდევ ერთი ამონახსნი: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. სინუსის პერიოდულობის გამო თითოეული ეს ამონახსნი წარმოშობს ამონახსნთა სიმრავლეს:

$$A = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\} \text{ და } B = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\}.$$

როგორც 1-ელი ნახაზიდან ვრწმუნდებით, მოცემულ განტოლებას მხოლოდ ამ ორი სახის ამონახსნი აქვს. შევეცადოთ, ამონახსნთა ორი სიმრავლე ერთი ფორმულით ჩავწეროთ. ამისათვის B სიმრავლე გადავწეროთ შემდეგაირად:

$$B = \left\{\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\} = \left\{-\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi, \ k \in Z\right\}.$$

თუ A და B სიმრავლეებს შევადარებთ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ A სიმრავლის ელემენტები მიღებულია $\frac{\pi}{6}$-სთვის π-ს ლუწი ჯერადების დამატებით, ხოლო B სიმრავლის ელემენტები $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$-ისთვის π-ს კენტი ჯერადების დამატებით. ამ ორი სიმრავლის გაერთიანება შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობით:

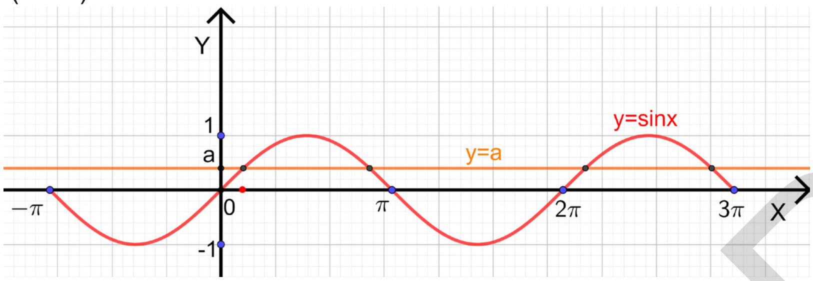
$$A \cup B = \left\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z\right\}.$$

პასუხი. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

განვიხილოთ sinx=a განტოლება ნებიმიერი a რიცხვის შემთხვევაში:

თუ a>1 ან a<–1 მოცემულ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, რადგან სინუს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] შუალედი.

ვთქვათ, $|a| \le 1$. ისევე, როგორც განხილულ მაგალითში, ავაგოთ y=sinx და y=a ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ.2).



ნახ. 2

როგორც ამ ნახაზიდან ვრწმუნდებით, sinx=a განტოლებას $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნს arcsina ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკსინუს ა“). მაგალითად, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, რადგან $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ და $\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{\pi}{6}$ არის $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნი.

საზოგადოდ, ნებისმიერი a რიცხვისთვის [–1; 1] შუალედიდან arcsina არის $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული ის რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$\sin(\arcsin a)=a.$$

ყველა დანარჩენი ამონახსნი იმავე მსჯელობით მიიღება, როგორც ეს 1-ელ მაგალითში იყო ნაჩვენები. კერძოდ, დაყვანის ფორმულის ძალით $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში გვექნება კიდევ ერთი ამონახსნი: π-arcsina, ხოლო სინუსის პერიოდულობის გამო თითოეული ეს ამონახსნი წარმოშობს ამონახსნთა სიმრავლეს:

$$A=\{\arcsin a+2\pi k, k\in Z\},\quad B=\{-\arcsin a+(2k+1)\pi, k\in Z\}.$$

ამ ორი სიმრავლის გაერთიანებით მივიღებთ sinx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნის ფორმულას:

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z. \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნები საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია გრადუსებში ჩავწეროთ. მაგალითად, განხილულ $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნები გრადუსებში ასე ჩაიწერება:

$$x=(-1)^n\cdot 30^\circ+180^\circ\cdot n,\ \ n\in Z.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება: $2\sin^2x-3\sin x-2=0$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: sinx=y. ამოვხსნათ მიღებული კვადრატული განტოლება:

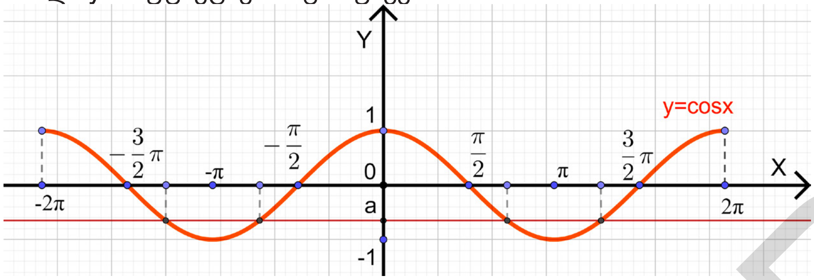
$$2y^2-3y-2=0\Rightarrow y_1=-\frac{1}{2},\ y_2=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n, n\in Z\\ \sin x=2\Rightarrow\varnothing\end{array}\right..$$

პასუხი: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

განვიხილოთ cosx=a განტოლება. ისევე, როგორც sinx=a შემთხვევაში, აქაც, როცა |a|>1, განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

განვიხილოთ cosx=a, როცა |a|≤1.

ავაგოთ y=cosx და y=a ფუნქციების გრაფიკები.



ნახ. 3

როგორც მე-3 ნახაზიდან ჩანს $[0;\pi]$ შუალედში მოცემულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნს arccosa ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკკოსინუს ა“).

მაგალითად, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, რადგან $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ და $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{\pi}{3}$ არის $\cos x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნი.

საზოგადოდ, ნებისმიერი a რიცხვისთვის [–1; 1] შუალედიდან, arccosa არის [0; π] შუალედში მოთავსებული ის რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$\cos(\arccos a)=a.$$

იმის გამო, რომ კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა arccosa-თან ერთად cosx=a განტოლებას დააკმაყოფილებს აგრეთვე –arccosa, ხოლო პერიოდულობის გამო – ამ ორ ამონახსნს დამატებული 2π-ს ნებისმიერი ჯერადები. ამიტომ cosx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z. \qquad (2)$$

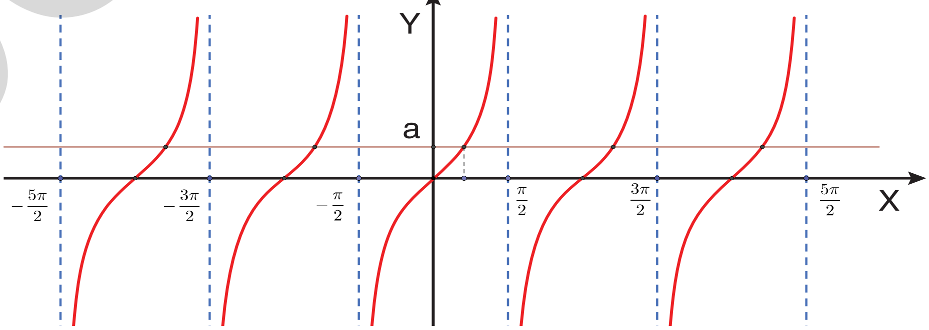
მაგალითი 2. ამოვხსნათ $\cos(2x+10^o)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ განტოლება.

ამოხსნა. იმის გამო, რომ არგუმენტში გრადუსებში მოცემული შესაკრები მონაწილეობს ამონახსნიც გრადუსებში უნდა ჩაიწეროს. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=180^o-45^o=135^o$. მე-2 ფორმულით:

$$2x+10^o=\pm135^o+360^o\cdot n,\ n\in Z\Rightarrow x=-5^o\pm67{,}5^o+180^o\cdot n,\ n\in Z.$$

პასუხი. ა) $x=-5^o\pm67{,}5^o+180^o\cdot n,\ n\in Z$.

tgx=a განტოლებას ნებისმიერი a რიცხვისათვის აქვს ამონახსნი, რადგან ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლეა მთელი რიცხვითი წრფე.



ნახ.4

როგორც მე-4 ნახაზზე ჩანს, მოცემულ განტოლებას $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თუ ამ ამონახსნს arctga ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკტანგენს ა“) და ტანგენსის პერიოდსაც გავითვალისწინებთ, მივიღებთ tgx=a განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$x=\operatorname{arctg}a+\pi k,\ k\in Z. \qquad (3)$$

განმარტების თანახმად $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}a<\frac{\pi}{2}$ და $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება arcsina? arccosa? arctga?
2. რამდენი ამონახსნი აქვს sinx=0,5 განტოლებას (0;2π) შუალედში?
3. როგორი a-რიცხვისთვის აქვს ამოხსნა cosx=a განტოლებას? tgx=a განტოლებას?
4. რამდენი ამონახსნი აქვს tgx=a განტოლებას (0;π) შუალედში?

სავარჯიშოები

1 იპოვე arcsina, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=-1; ზ) a=0.

2 იპოვე arccosa, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=-1; ზ) a=0.

3 იპოვე arctga, თუ:

ა) a=1; ბ) a=–1; გ) $a=\sqrt{3}$; დ) $a=-\sqrt{3}$; ე) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$; ვ) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ზ) a=0.

4 მოცემული გამოსახულებებიდან რომელს არა აქვს აზრი?

ა) arcsin0,7; ბ) arccos(–0,3); გ) arctg13; დ) arccos3.

5 იპოვე:

ა) sin(arcsin1); ბ) cos(arccos0,13); გ) tg(arctg7); დ) cos(arccos0,5).

6 იპოვე sinx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

7 იპოვე cosx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) $a=\frac{1}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

8 იპოვე tgx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) a=1; ბ) a=-1; გ) $a=\sqrt{3}$; დ) $a=-\sqrt{3}$; ე) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$; ვ) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ზ) a=0.

9 ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin 2x=0$; ბ) $\sin 3x=\frac{1}{2}$; გ) $\cos(x+3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

დ) $\cos(2x+30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-3=0$.

10 იპოვე $2\sin x+1=0$ განტოლების $(\pi;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი.

11 იპოვე $\sqrt{2}\cos x-1=0$ განტოლების $(1{,}5\pi;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი.

12 გამოთვალე $\sqrt{12}\operatorname{tg}x-2=0$ განტოლების $(-\pi;\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნების ჯამი.

13 ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin^2x+2\sin x+1=0$; ბ) $2\cos^2x-5\cos x+2=0$; გ) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=2$; დ) $1-\cos^2x=2\sin x$.

14 მოცემულია $\sin x=\operatorname{tg}x$ განტოლება.
ა) ამოხსენი განტოლება გრაფიკულად კომპიუტერული პროგრამის დახმარებით;
ბ) ამოხსენი იგივე განტოლება ალგებრულად.

15 მოცემულია $\cos x=\operatorname{tg}x$ განტოლება.
ა) ამოხსენი განტოლება გრაფიკულად კომპიუტერული პროგრამის დახმარებით;
ბ) ამოხსენი იგივე განტოლება ალგებრულად.

16 დაადგინე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:
ა) $\arcsin(\sin\pi)$; ბ) $\arccos(\cos 4)$; გ) $\sin(\operatorname{arctg}1)$;

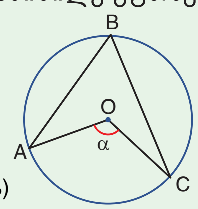
დ) $\sin(\operatorname{arctg}2)$; ე) $\cos(\arcsin(-\frac{1}{3}))$.

17 ამოხსენი განტოლება:
ა) $\sin x-\cos x=0$; ბ) $\cos^2x-\sin^2x=0$; გ) $\cos^4x-\sin^4x=1$; დ) $\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$.

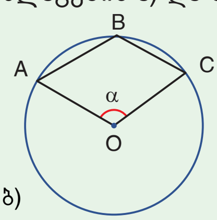
18 მოცემულია $\cos 55°=a$. იპოვე:
ა) $\sin 35°$; ბ) $\cos 125°$; გ) $\sin 145°$; დ) $\cos 35°$; ე) $\sin 55°$.

19 მოცემულია ABC სამკუთხედი. $\angle A=45°$, $\angle C=60°$, $CB=a$ სმ. იპოვე AB და AC გვერდები.

20 გამოთვალე წრეწირში ჩახაზული ABC კუთხის ზომა, თუ AOC ცენტრალური კუთხე α-ს ტოლია. განიხილე კუთხეების განლაგების ა) და ბ) შემთხვევები:



ა)



ბ)

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №5

უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები

1 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=$

ა) $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$ ბ) $\frac{\pi}{6};$ გ) $\frac{\pi}{3};$ დ) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

2 $\cos\arccos 1=$

ა) $1;$ ბ) $\frac{5\pi}{6};$ გ) $0;$ დ) $\pi.$

3 $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=$

ა) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$ ბ) $\frac{1}{\sqrt{3}};$ გ) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;$ დ) $\frac{\pi}{3}.$

იპოვე განტოლების ზოგადი ამონახსნი: №[4-6]

4 $\sin 2x=0.$

ა) $\pi n,\ n\in Z;$ ბ) $\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;$

გ) $2\pi n,\ n\in Z;$ დ) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

5 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$

ა) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$ ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$

გ) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi,\ n\in Z;$ დ) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z.$

6 $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3}.$

ა) $-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z;$ ბ) $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z;$

გ) $-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{2},\ n\in Z;$ დ) $-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

ამოხსენი განტოლება №7, №8:

7 $\cos^2 x=3\cos x.$

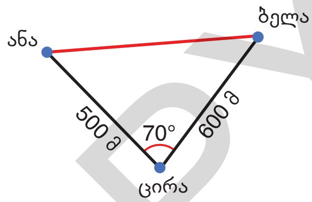
8 $3\operatorname{tg}(3x+1)-\sqrt{3}=0.$

9 იპოვე $\sin x=-0,5$ განტოლების უმცირესი დადებითი ამონახსნი.

10 იპოვე $2\sin 2x=-1$ განტოლების უდიდესი უარყოფითი ამონახსნი.

3.9 კოსინუსების თეორემა

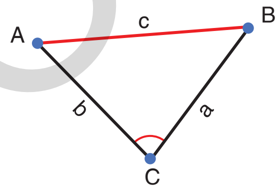
მიზანი კოსინუსების თეორემისა და მისი შედეგების გაცნობა და გამოყენება



ამოცანა 1. ცირას სახლი ორი ქუჩის გადაკვეთაზე მდებარეობს. ეს ქუჩები 70°-იანი კუთხით იკვეთება. ერთ ქუჩაზე, ცირას სახლიდან 500 მეტრში, ცხოვრობს ანა, ხოლო მეორე ქუჩაზე, ცირას სახლიდან 600 მეტრში – ბელა. დავადგინოთ, რა მანძილია ანას სახლიდან ბელას სახლამდე.

როგორც სქემატური ნახაზიდან ჩანს, ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა ვიცოდეთ, როგორ გამოვთვალოთ მოცემული ორი გვერდითა და მათ შორის კუთხით სამკუთხედის მესამე გვერდი. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა **კოსინუსების თეორემა:**

სამკუთხედის ყოველი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამავე გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი.

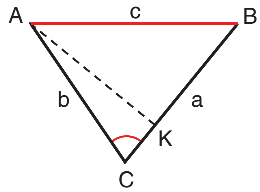


ნახ. 1

ჩამოყალიბებული თეორემა 1-ელი ნახაზის მიხედვით ასე ჩაიწერება:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C. \qquad (1)$$

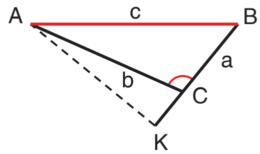
დამტკიცება. იმ შემთხვევაში, როცა C მართი კუთხეა, (1) ტოლობა გამომდინარეობს პითაგორას თეორემიდან, რადგან $\cos 90°=0$.



ნახ. 2

ვთქვათ, C მახვილი კუთხეა (ნახ.2). A წვეროდან BC გვერდზე დავუშვათ AK სიმაღლე. პითაგორას თეორემის ძალით:

$$c^2=AK^2+BK^2. \qquad (2)$$



ნახ. 3

მეორე მხრივ,

$$AK^2=b^2-CK^2=b^2-(b\cos\angle C)^2,\ BK=a-CK=a-b\cos\angle C. \qquad (3)$$

1-ელი ტოლობა მე-3 ტოლობების მე-2 ტოლობაში ჩასმით მიიღება (შეამოწმე დამოუკიდებლად).

თუ C ბლაგვი კუთხეა (ნახ.3), მაშინ

$$AK^2=b^2-CK^2=b^2-(b\cos(180°-\angle C))^2,$$

ხოლო

$$BK=a+CK=a+b\cos(180°-\angle C).$$

თუ უკანასკნელ ორ ტოლობას ჩავსვამთ მე-2 ტოლობაში და ამასთან გავითვალისწინებთ, რომ $\cos(180°-\angle C))=-\cos\angle C$, ისევ მივიღებთ 1-ელ ტოლობას (შეამოწმე დამოუკიდებლად). თეორემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ 1-ელ ამოცანას. კალკულატორის დახმარებით ვადგენთ, რომ $\cos 70°\approx 0,342$. ამოცანის მონაცემების 1-ელ ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\sqrt{500^2+600^2-2\cdot 500\cdot 600\cdot 0,342}\approx 780.$$

პასუხი. ანას სახლიდან ბელას სახლამდე მანძილი, დაახლოებით, 780 მეტრია.

1-ელი ტოლობიდან ვიღებთ C კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \qquad (4)$$

მიღებული ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ სამკუთხედის კუთხეები მოცემული სამი გვერდის მიხედვით.

ამოცანა 2. სამკუთხედის გვერდებია: ა) 8სმ, 15სმ, 17სმ; ბ) 1სმ, 2სმ, $\sqrt{7}$ სმ. გამოვთვალოთ სამკუთხედის უდიდესი კუთხის სიდიდე.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ სამკუთხედის ყოველი კუთხე (0°; 180°) შუალედს ეკუთვნის. ამ შუალედში კი კუთხე ცალსახად განისაზღვრება მისი კოსინუსის მნიშვნელობით (ახსენი, რატომ). მაშასადამე, საკმარისია გამოვთვალოთ მოცემული სამკუთხედის უდიდესი კუთხის კოსინუსი და მისი საშუალებით ვიპოვოთ კუთხის მნიშვნელობა.

სამკუთხედის უდიდესი კუთხე უდიდესი გვერდის მოპირდაპირეა, ამიტომ საძიებელი კუთხის კოსინუსი მე-4 ფორმულის ძალით იქნება:

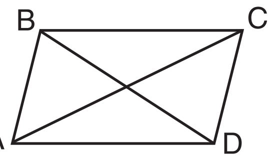
ა) $\dfrac{8^2+15^2-17^2}{2\cdot 8\cdot 15}=0$, ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 90°, რადგან (0°; 180°) შუალედში კოსინუსი 0-ის ტოლი მხოლოდ 90°-ზე ხდება.

ბ) $\dfrac{1^2+2^2-7}{2\cdot 1\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$, ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 120°, რადგან (0°; 180°) შუალედში კოსინუსი $-\dfrac{1}{2}$-ის ტოლი მხოლოდ 120°-ზე ხდება.

პასუხი: ა) 90°; ბ) 120°.

კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარეობს პარალელოგრამის შემდეგი თვისება:

პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ოთხივე გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია.



ნახ. 4

ჩამოყალიბებული თვისება მე-4 ნახაზის მიხედვით ასე ჩაიწერება:

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2. \qquad (5)$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ კოსინუსების თეორემა ABD და ADC სამკუთხედებში:

$$BD^2= AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A, \qquad (6)$$

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle D. \qquad (7)$$

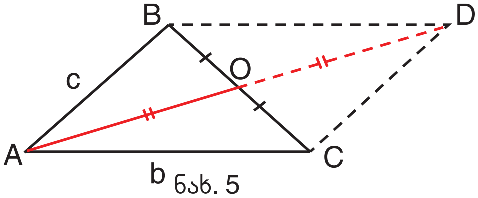
თუ მე-7 ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ CD=AB, ხოლო $\cos\angle D=\cos(180°-\angle A)=-\cos\angle A$, მივიღებთ:

$$AC^2=AD^2+AB^2+2AD\cdot AB\cdot\cos\angle A \qquad (8)$$

მე-6 და მე-8 ტოლობების შეკრებით მივიღებთ მე-5 ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 3. სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. გამოვთვალოთ a გვერდისადმი გავლებული სამკუთხედის მედიანა.

ამოხსნა. ვთქვათ ΔABC-ში AB=C, AC=b და BC=a. მე-5 ნახაზზე AO მედიანაა. AO სხივზე გადავდოთ AO მონაკვეთის ტოლი OD მონაკვეთი და D წერტილი შევაერთოთ B და C წერტილებთან. მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რადგან O წერტილი მის AD და BC დიაგონალებს შუაზე ყოფს.



ნახ. 5

დამტკიცებულ თვისებაზე დაყრდნობით ვწერთ:

$$(2AO)^2+BC^2=2(AB^2+AC^2),\text{ ანუ}$$

$$(2AO)^2=2(c^2+b^2)-a^2.$$

თუ a გვერდზე დაშვებულ მედიანას m_a-თი აღვნიშნავთ, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$m_a=\frac{\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}}{2}.$$

უპასუხე კითხვებს:

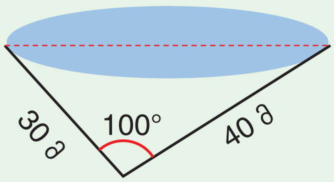
1. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის გვერდს მისი მოპირდაპირე კუთხითა და ამ კუთხის მიმდებარე გვერდებით?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის კუთხეებს მოცემული სამი გვერდით?
3. როგორია სამკუთხედი, თუ მისი უდიდესი გვერდის კვადრატი: ა) მეტია, ბ) ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე?
4. როგორია სამკუთხედი, თუ მისი ერთ-ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია?
5. რა თვისება აქვს პარალელოგრამს?
6. როგორ გამოითვლი სამკუთხედის მედიანას მოცემული სამი გვერდის მიხედვით?
7. რომელი კუთხის კოსინუსი მიიღებს მონაწილეობას ABC სამკუთხედში BC გვერდის დანარჩენი ორი გვერდის საშუალებით გამოთვლაში?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე სამკუთხესდის c გვერდი, თუ a=3სმ, b=4სმ, ხოლო a და b გვერდებს შორის კუთხეა: ა) 90°; ბ)120°; გ) 60°.

2 გამოთვალე ABC სამკუთხედის AC გვერდი, თუ AB=5სმ, BC=12სმ, ხოლო B კუთხის სიდიდეა: ა) 30°; ბ) 90°; გ) 150°.

3 გამოთვალე გუბურის სიგრძე მე-6 ნახაზის მიხედვით.



ნახ. 6

4 გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 6სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე 30°-ის ტოლია.

5 გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 10სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხის კოსინუსი –0,25-ის ტოლია.

6 გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 10სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხის: ა) კოსინუსი 0,6-ის ტოლია; ბ) სინუსი 0,8-ის, ტოლია.

7 გამოთვალე სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი გვერდებია:
ა) 3სმ, 3სმ და $3\sqrt{2}$ სმ; ბ) 3სმ, 3სმ და $3\sqrt{3}$ სმ.

8 გამოთვალე სამკუთხედის უდიდესი კუთხის სიდიდე, თუ სამკუთხედის გვერდებია:
ა) 5სმ, 6სმ და $\sqrt{61}$ სმ; ბ) 1მ, $\sqrt{3}$ მ და $\sqrt{7}$ მ.

9 დაადგინე, მოცემული გვერდების მიხედვით რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა, რომელი მართკუთხა და რომელი ბლაგვკუთხა:
ა) 7სმ, 10სმ, 14სმ; ბ) 7მ, 24მ, 25მ; გ) 10დმ, 11დმ, 13დმ.

10 ABCD პარალელოგრამში AB=9სმ, BC=7სმ, AC=14სმ. იპოვე BD.

11 პარალელოგრამის დიაგონალებია 6სმ და 10სმ, ხოლო ერთი გვერდი – 4სმ. იპოვე პარალელოგრამის დანარჩენი გვერდები.

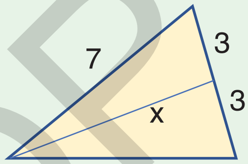
12 იპოვე პარალელოგრამის გვერდები, თუ დიაგონალებია 8სმ და 12სმ, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე – 60°.

13 იპოვე პარალელოგრამის გვერდები, თუ დიაგონალებია 4სმ და 6სმ, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხის კოსინუსი უდრის $\frac{1}{3}$-ს.

14 სამკუთხედის გვერდებია: 7სმ, 8სმ და 9სმ. იპოვე სამივე მედიანის სიგრძე.

15 ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 8სმ-ის, ხოლო ფერდისადმი გავლებული მედიანა 5სმ-ის ტოლია. იპოვე ფუძე.

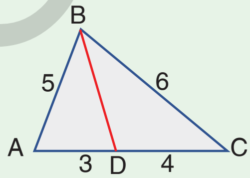
16 მე-7 ნახაზის მიხედვით იპოვე x.



ნახ. 7

17 სამკუთხედის ერთი მედიანა 9სმ-ია, მეორე მედიანა – 12სმ, ხოლო ამ მედიანებს შორის კუთხე – 60°. იპოვე სამკუთხედის გვერდები.

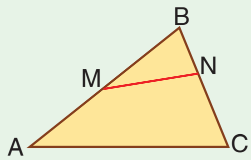
18 ჩამოაყალიბე და დაამტკიცე პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა.



ნახ. 8

19 მე-8 ნახაზის მიხედვით იპოვე BD მონაკვეთის სიგრძე.

20 სამკუთხედის გვერდებია 5 მ, 7მ და 8მ. გამოთვალე სამკუთხედის იმ ბისექტრისის სიგრძე, რომელიც უდიდესი კუთხის წვეროზეა გავლებული.



ნახ. 9

21 ABC სამკუთხედში (ნახ. 9) AB=8სმ, BC=5სმ, AC=7სმ. გამოთვალე MN მონაკვეთის სიგრძე, სადაც M წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია, ხოლო N∈BC და BN=2სმ.

22 ABC სამკუთხედში AB=13სმ, BC =20სმ, ხოლო BK სიმაღლე 12სმ-ია. გამოთვალე B კუთხის სიდიდე. განიხილე ორი შესაძლო შემთხვევა.

23 გამოთვალე სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი, თუ მისი გვერდებია: 13სმ, 14სმ და 15სმ.

24 იპოვე x-ის ყველა რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ x, x+1, x+2 ბლაგვკუთხა სამკუთხედის გვერდებია.

25 მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეა α, ხოლო ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტი – a. გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ თუ ABC სამკუთხედში BD ბისექტრისაა, მაშინ $BD^2=AB \cdot BC-AD \cdot DC$

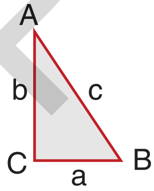
3.10 სინუსების თეორემა

მიზანი

სინუსების თეორემისა და მისი შედეგების გაცნობა/გამოყენება

ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში, ABC სამკუთხედის A, B და C კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები აღვნიშნოთ a, b და c ასოებით. როგორც ვიცით, სამკუთხედში დიდი გვერდის მოპირდაპირედ დიდი კუთხე ძევს. ნიშნავს თუ არა ეს, რომ რადენჯერაც a გვერდი მეტია b გვერდზე, იმდენჯერ A კუთხე მეტი იქნება B კუთხეზე? ანუ, არის თუ არა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება?

პასუხია – არა. მაგალითად, განვიხილოთ მართკუთხა ABC სამკუთხედი, რომლის $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. ამ სამკუთხედში $c=2a$, $b=a\sqrt{3}$. გამოდის, რომ კუთხეები 1-ის, 2-ისა და 3-ის პროპორციულია, ხოლო გვერდები – 1-ის, $\sqrt{3}$-ის და 2-ის პროპორციული.



მაგრამ, თუ კუთხეების ნაცვლად ამ კუთხეების სინუსებს შორის პროპორციას განვიხილავთ, მივიღებთ: $\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$, ანუ მოცემული სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.

ეს თვისება ნებისმიერი სამკუთხედისთვისაა დამახასიათებელი. კერძოდ, მართებულია:

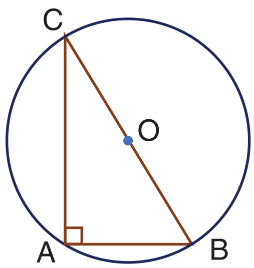
სინუსების თეორემა. ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პირდაპირპროპორციულია და მათი შეფარდება ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია. ანუ

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდები, ხოლო A, B, C ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეებია.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდის შეფარდება მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრის ტოლია.

1ა, 1ბ და 1გ ნახაზებზე მოცემულია ΔABC-ს სამი განსხვავებული შემთხვევა. სამივე შემთხვევაში უნდა დავამტკიცოთ $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$ ტოლობა.



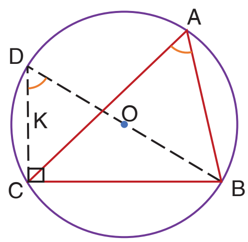
ნახ. 1ა

I. $\angle A=90°$ (ნახ.1ა). ამ შემთხვევაში $BC=2R$, ამიტომ

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{2R}{\sin 90°} = 2R;$$

II. $\angle A<90°$ (ნახ.1ბ). ნახაზზე O შემოხაზული წრეწირის ცენტრია, BD – დიამეტრი. $\angle CDB = \angle A$, რადგან CDB და A ერთსა და იმავე რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეებია. $\angle DCB=90°$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე. ამიტომ:

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{BC}{\sin\angle CDB} = BD = 2R;$$



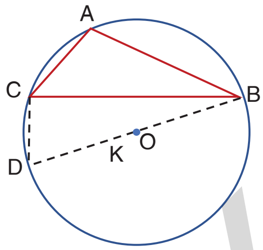
ნახ. 1ბ

III. $\angle A>90°$ (ნახ.1გ). ნახაზზე O შემოხაზული წრეწირის ცენტრია,

BD – დიამეტრი. $\angle A=180°-\angle CDB$, რადგან CDB და A დამატებით რკალებზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეებია.

$\angle DCB= 90°$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე. ამიტომ:

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{BC}{\sin(180°-\angle CDB)}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}=BD=2R.$$



ნახ. 1გ

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემოხაზული წრის რადიუსის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}. \qquad (1)$$

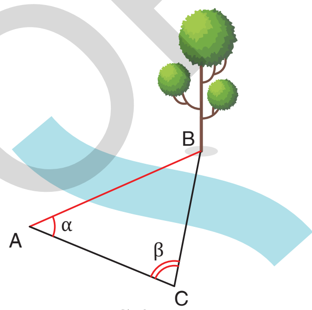
სინუსებისა და კოსინუსების თეორემებს დიდი გამოყენება აქვს პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნაში. მოვიყვანოთ სინუსების თეორემის პრაქტიკული გამოყენების ერთი მაგალითი.

ვთქვათ, იმყოფები მდინარის ერთ მხარეს A წერტილში და გინდა გაიგო მდინარის მეორე მხარეს B წერტილში მდგომ ხემდე AB მანძილი (ნახ.2).

ამ მიზნის მისაღწევად შეგიძლია ასე იმოქმედო:

1. გადაზომო შენსავე ნაპირზე მანძილი რაიმე C წერტილამდე;
2. დაადგინო α და β კუთხეთა ზომა;
3. დაწერო სინუსების თეორემიდან გამომდინარე პროპორცია:

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin(180°-\alpha-\beta)},$$



ნახ. 2

საიდანაც, დაყვანის ფორმულის გათვალისწინებით, მიიღებ საძიებელი მანძილის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$AB=\frac{AC\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ ვიცით სამკუთხედის ერთი გვერდი და ორი კუთხე, სინუსების თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია გავიგოთ დანარჩენი გვერდები.

მაგალითი. ABC სამკუთხედში AB=10სმ, $\angle A=30°$, $\angle B=50°$. ვიპოვოთ AC და BC.

ამოხსნა. სინუსების თეორემით ვწერთ:

$$\frac{AC}{\sin50°}=\frac{AB}{\sin100°}\Rightarrow AC=\frac{10\sin50°}{\sin100°}\approx\frac{10\cdot0,766}{0,9848}\approx7,778;$$

$$\frac{BC}{\sin30°}=\frac{AB}{\sin100°}\Rightarrow BC=\frac{10\sin30°}{\sin100°}\approx\frac{10\cdot0,5}{0,9848}\approx5,077.$$

შევნიშნოთ, რომ 50° და 100° არგუმენტებისათვის სინუსის მნიშვნელობის დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად გამოვიყენეთ კალკულატორი.

უპასუხე კითხვებს:

1. არის თუ არა სამკუთხედის გვერდები შესაბამისი კუთხეების პროპორციული? შესაბამის კუთხეთა სინუსების პროპორციული?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსს მოცემული გვერდითა და მოპირდაპირე კუთხით?
3. როგორ გამოთვლი მიუვალ ადგილამდე მანძილს სინუსების თეორემის გამოყენებით?
4. საკმარისია თუ არა სამკუთხედის კუთხეებისა და შემოხაზული წრის რადიუსის ცოდნა სამკუთხედის გვერდების საპოვნელად?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრი, თუ:
ა) AB=5 სმ და $\angle C = 30°$; ბ) BC= 8 დმ და $\angle A = 45°$; გ) AC= 6 მ და $\angle B = 60°$.

2 იპოვე ABC სამკუთხედის AB გვერდი თუ შემოხაზული წრის რადიუსია 6 სმ, ხოლო: ა) $\angle C = 30°$; ბ) $\angle C = 45°$; გ) $\angle C = 60°$; დ) $\angle C = 90°$; ე) $\angle C = 120°$.

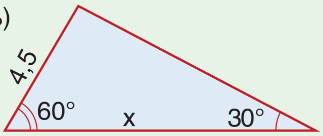
3 გამოთვალე ABC სამკუთხედის A კუთხის სინუსი, თუ შემოხაზული წრის რადიუსი 6 სმ-ის, ხოლო BC გვერდი: ა)12 სმ-ის; ბ) 6 სმ-ის; გ) 5 სმ-ის ტოლია.

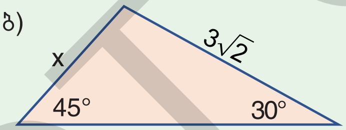
4 გამოთვალე A წერტილიდან ხემდე მანძილი პარაგრაფში მოცემული მაგალითის მიხედვით (ნახ.2), თუ α=15°, β=45°, AC=6 მ.

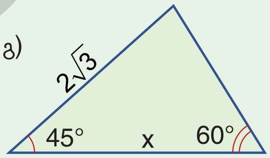
5 იპოვე ABC სამკუთხედის C კუთხის გრადუსული ზომა, თუ შემოხაზული წრის რადიუსი 8 სმ-ის, ხოლო AB გვერდი $8\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?

6 ABC სამკუთხედში AB=10 სმ, $\angle A = 55°$, $\angle B = 95°$. გამოთვალე შემოხაზული წრის რადიუსი.

7 ნახაზის მიხედვით იპოვე x:

ა)


ბ)


გ)


8 მოცემულია a=3სმ, b=5სმ, ხოლო $\angle C = 120°$. იპოვე შემოხაზული წრის რადიუსი.

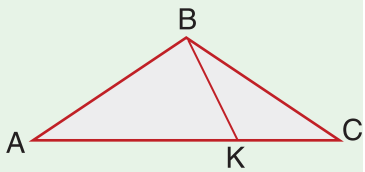
9 მოცემულია a=8სმ, $\angle B = 40°$, $\angle C = 80°$. იპოვე სამკუთხედის დანარჩენი გვერდები.

10 მოცემულია a=5 სმ, b=6 სმ, c=7 სმ. იპოვე სამკუთხედის კუთხეები.

11 ABC სამკუთხედში AB=2, AC=$2\sqrt{3}$, $\angle B = 60°$. იპოვე მესამე გვერდი და დანარჩენი კუთხეები.

12 მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. გამოთვალე იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც გადის მახვილი კუთხეების წვეროებსა და დიდი კათეტის შუა წერტილზე.

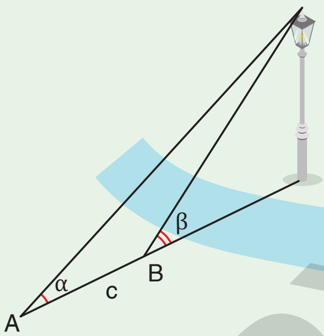
13 ნახაზზე მოცემულ სამკუთხედში AB=BC. დაამტკიცე, რომ ABK და BKC სამკუთხედებზე ტოლი წრეწირები შემოიხაზება.



14 პარალელოგრამის დიაგონალი, რომლის სიგრძე d-ს ტოლია, გვერდებთან α და β კუთხეებს ადგენს. იპოვე პარალელოგრამის გვერდები.

15 გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ მისი გვერდებია: 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ.

16 გამოთვალე მდინარის გაღმა მდგომი ბოძის სიმაღლე, თუ A წერტილიდან ბოძი მოჩანს α კუთხით, B წერტილიდან – β კუთხით, ხოლო A-დან B-მდე მანძილი c მეტრია.

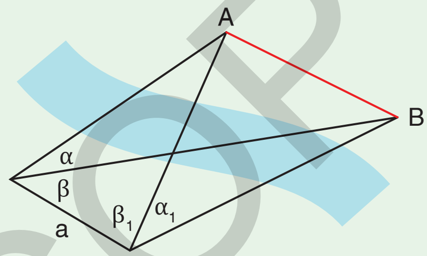


17 გამოთვალე სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ჩახაზული წრის რადიუსია r, შემოხაზული წრის რადიუსი – R, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე – α.

18 მოცემულია მდინარის გაღმა მდებარე A და B წერტილებს შორის მანძილის გამოსათვლელად საჭირო სქემატური ნახაზი და სიდიდეები.

ა) აღწერე ეტაპები, რომლებიც საჭიროა A და B წერტილებს შორის მანძილის გამოსათვლელად;

ბ) შეარჩიე a მონაკვეთისა და α, β, α_1, β_1 კუთხეთა კონკრეტული მნიშვნელობები და ამ მნიშვნელობებისათვის გამოთვალე AB მანძილი.



19 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდია 17 სმ, ხოლო ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე – 8 სმ.

20 გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი გვერდია 17 სმ, ხოლო ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე – 8 სმ.

21 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 9 და 12, ხოლო ამ გვერდებს შორის კუთხე – 30°.

22 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსია 3 სმ, ხოლო სამკუთხედის პერიმეტრი – 16 სმ.

23 გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი დიაგონალებია 8 სმ და 13 სმ.

24 ABC სამკუთხედის ფართობია 24 სმ^2. AC გვერდებზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ AM:MC=1:2. გამოთვალე ABM სამკუთხედის ფართობი.

წყვილებში სამუშაო

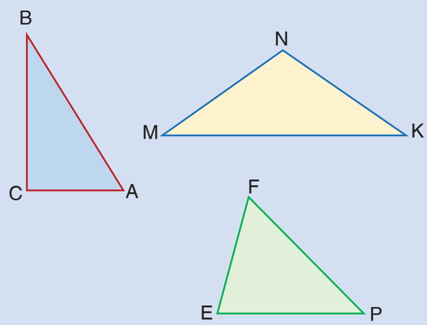
ნახაზზე მოცემულია სამი სამკუთხედი.
თითოეული სამკუთხედის შემთხვევაში:

ა) სახაზავისა და ტრანსპორტირის გამოყენებით დაადგინეთ კუთხეებისა და გვერდების ზომები;

ბ) გამოთვალეთ კუთხეთა სინუსები;

გ) გამოთვალეთ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეთა სინუსებთან შეფარდებები;

დ) გამოიტანეთ დასკვნა.

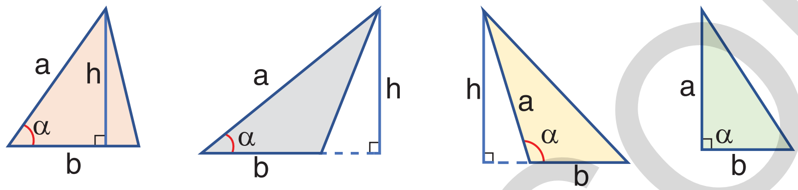


მიზანი

ამოცანების ამოხსნა ფართობის ფორმულების გამოყენებით.

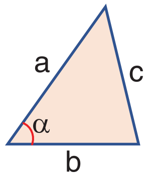
ამოცანა 1. გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი a და b გვერდებითა და ამ გვერდებს შორის მდებარე α კუთხით.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, სამკუთხედის ფართობი გვერდისა და ამ გვერდზე ან მის გაგრძელებაზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია: $S_\Delta = \frac{1}{2}bh$.



მეორე მხრივ, მოცემული ნახაზებიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის შემთხვევაში $h=a\cdot\sin\alpha$ (ახსენი, რატომ), საიდანაც მივიღებთ ფორმულას:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha. \qquad (1)$$



1-ელი ფორმულიდან სინუსების თეორემის გამოყენებით მიიღება სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა სამი გვერდითა და შემოხაზული წრის რადიუსით. ამისათვის საკმარისია, $\sin\alpha$ გამოვსახოთ $\frac{c}{\sin\alpha}=2R$ ტოლობიდან $\sin\alpha=\frac{c}{2R}$ და ჩავსვათ 1-ელ ფორმულაში. მივიღებთ:

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}. \qquad (2)$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი მისი მოცემული სამი გვერდით.

ამოხსნა. ვთქვათ, a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო A, B, C ამ გვერდების შესაბამისი კუთხეები. კოსინუსების თეორემის თანახმად

$$\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

ხოლო 1-ელი ფორმულიდან

$$\sin\angle C = \frac{2S}{ab}.$$

თუ ამ ტოლობებს შევიტანთ $\sin^2\angle C+\cos^2\angle C=1$ იგივეობაში, მივიღებთ:

$$\left(\frac{2S}{ab}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=1.$$

ამ ტოლობიდან კვადრატების სხვაობის ფორმულის სამჯერადად გამოყენებით

$$16S^2=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=$$
$$((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. ამ აღნიშვნით გვექნება ტოლობები:

$$a+b+c=2p,\ a+b-c=2(p-c),\ a-b+c=2(p-b),\ c-a+b=2(p-a),$$

რომელთა ზემოთ მიღებულ ტოლობაში ჩასმით და 16-ზე შეკვეცით მიიღება $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, ანუ

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (3)$$

მიღებულ ტოლობას **ჰერონის ფორმულა** ეწოდება.

ჰერონის ფორმულა საშუალებას იძლევა სამი გვერდით გამოვთვალოთ სამკუთხედის სიმაღლეები, ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსები.

ამოცანა 3. სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. გამოვთვალოთ მასში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები.

ამოხსნა. ჩახაზული წრეწირის რადიუსის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფართობის გამოსათვლელი ფორმულით $S=pr$, სადაც $p=(13+14+15):2=21$ და $r=\dfrac{S}{21}$, ხოლო S გამოვთვალოთ ჰერონის ფორმულით: $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$. მივიღეთ, რომ $r=4$.

შემოხაზული წრეწირის R რადიუსი მეორე ტოლობიდან გამოვსახოთ: $R=\dfrac{abc}{4S}$.

თუ მიღებულ ფორმულაში ჩავსვამთ რიცხვით მონაცემებს, მივიღებთ:

$$R=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\frac{65}{8}=8{,}125.$$

პასუხი. $r=4$ სმ, $R=8{,}125$ სმ.

ანალოგიურად შეგვიძლია სამი გვერდით გამოვთვალოთ სამკუთხედის სიმაღლე. მაგალითად, მე-3 ამოცანის მონაცემებით 14 სმ-ის ტოლ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე გამოითვლება $S=\dfrac{1}{2}ah$ ფორმულაში შესაბამისი რიცხვების ჩასმით:

$$84=\frac{1}{2}\cdot 14h \Rightarrow h=12.$$

პასუხი. 12 სმ.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის ფართობს ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის ფართობს სამი გვერდით?
3. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის სამი გვერდით:

ა) ჩახაზული წრეწირის რადიუსს?

ბ) შემოხაზული წრეწირის რადიუსს? გ) სიმაღლეს?

დ) კუთხის სინუსს? ე) კუთხის კოსინუსს? ვ) ბისექტრისას? ზ) მედიანას?

4. გვერდებს შორის რა სიდიდის კუთხის შემთხვევაში იქნება სამკუთხედის ფართობი უდიდესი?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი a და b გვერდებითა და მათ შორის მდებარე α კუთხით, თუ:

ა) $a=3$ სმ, $b=4$ სმ, $\alpha=30°$; ბ) $a=5$ სმ, $b=8$ სმ, $\alpha=45°$; გ) $a=6$ სმ, $b=10$ სმ, $\alpha=60°$;
დ) $a=14$ სმ, $b=7$ სმ, $\alpha=90°$; ე) $a=11$ სმ, $b=8$ სმ, $\alpha=150°$; ვ) $a=16$ სმ, $b=5$ სმ, $\alpha=15°$.

2 გამოთვალე $\sin\alpha$, სადაც α სამკუთხედის a და b გვერდებს შორის კუთხეა, ხოლო S სამკუთხედის ფართობი, თუ:

ა) $a=4$ სმ, $b=5$ სმ, $S=10$ სმ^2; ბ) $a=7$ სმ; $b=9$ სმ; $S=21$ სმ^2;
გ) $a=\sqrt{5}+1$ სმ; $b=\sqrt{5}-1$ სმ; $S=0{,}25$ სმ^2.

3 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდებია:

ა) 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ; ბ) 4 სმ, 5 სმ, 7 სმ;
გ) 26 სმ, 28 სმ, 30 სმ; დ) $3+\sqrt{2}$ სმ, $3-\sqrt{2}$ სმ, 4 სმ.

4 სამკუთხედის გვერდებია:

ა) 8 სმ, 15 სმ, 17 სმ; ბ) 5 სმ, 5 სმ, 6 სმ; გ) 7 სმ, 11 სმ, 12 სმ; დ) 7 სმ, 6 სმ, 5 სმ.

გამოთვალე:

1) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი;
2) ჩახაზული წრის რადიუსი;
3) უდიდეს გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

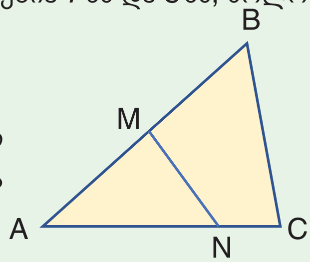
5 დაამტკიცე პარალელოგრამის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა: $S=ab\cdot\sin\alpha$, სადაც a და b პარალელოგრამის გვერდები, ხოლო α ამ გვერდებს შორის კუთხეა.

6 გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი გვერდი 10 სმ, ხოლო გვერდებს შორის კუთხეა:

ა) 30°; ბ) 60°; გ) 120°; დ) 40°.

7 გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 7 სმ და 8 სმ, ხოლო გვერდებს შორის კუთხე:

ა) 30°; ბ) 45°; გ) 90°; დ) 50°.



8 გამოთვალე სამკუთხედის მესამე გვერდი, თუ ფართობი 8 სმ^2, ერთი გვერდი 4 სმ, მეორე 5 სმ, ხოლო ამ გვერდებს შორის: ა) მახვილი კუთხეა; ბ) ბლაგვი კუთხეა.

9 ABC სამკუთხედის ფართობია 18 სმ^2. AB და AC გვერდებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $AM=MB$, $AN:NC=2:1$. გამოთვალე AMN სამკუთხედის ფართობი.

10 ABC სამკუთხედის ფართობია 60 სმ^2. AB, AC და BC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M, N და K წერტილები ისე, რომ $AM:MB=1:2$, $AN:NC=2:3$, $BK:KC=1:3$. გამოთვალე MNK სამკუთხედის ფართობი.

11 გამოთვალე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $AB=10$ სმ, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.

12 დაამტკიცე ABC სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$S_{\Delta}=\frac{AB^2\cdot\sin\angle A\cdot\sin\angle B}{2\sin(\angle A+\angle B)}.$$

13 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია a და b, ხოლო ამ გვერდებს შორის მოთავსებული მედიანა m.

14 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი 6სმ და 9სმ სიგრძის მედიანები ურთიერთმართობულია.

15 დაამტკიცე, რომ ამოზნექილი ოთხკუთხედის ფართობი დიაგონალებისა და დიაგონალებს შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

16 დაამტკიცე სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$S_{\Delta}=\frac{2}{3}m_1m_2\cdot\sin\alpha,$$

სადაც m_1 და m_2 მედიანები, ხოლო α მედიანებს შორის კუთხეა.

17 გამოთვალე წესიერი ექვსკუთხედის:
ა) შიგა კუთხე; ბ) დიაგონალების რაოდენობა.

18 წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი a-ს ტოლია. იპოვე:
ა) დიდი დიაგონალი;
ბ) მცირე დიაგონალი;
გ) შემოხაზული წრის რადიუსი;
დ) ჩახაზული წრის რადიუსი;
ე) ფართობი.

19 წესიერი n-კუთხედის შიგა კუთხე 170 გრადუსია. იპოვე n.

წყვილებში სამუშაო

1. დაამტკიცეთ წესიერი n-კუთხედის ფართობის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა:

$$S_n=\frac{n}{2}R_n^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{n},$$

სადაც R_n წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.

2. ისარგებლეთ დამტკიცებული ფორმულით და გამოიყვანეთ ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა შემოხაზული წრის რადიუსით:
ა) ტოლგვერდა სამკუთხედის;
ბ) კვადრატის;
გ) წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევაში.

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №6
სინუსების და კოსინუსების თეორემები
შეარჩიე სწორი პასუხი (№1-6):

1 ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია a, b, c, ხოლო მათი მოპირდაპირე კუთხეები – α, β, γ. ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან რომელია მართებული?

ა) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$; ბ) $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$;

გ) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$; დ) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$.

2 ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია a, b, c, ხოლო მათი მოპირდაპირე კუთხეები – α, β, γ. ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან რომელია მართებული?

ა) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$; ბ) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

გ) $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$; დ) $\cos\beta = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3 რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა მოცემული გვერდების მიხედვით?

ა) 5, 12, 13; ბ) 2, 3, 4; გ) 5, 6, 7; დ) 4, 5, 7.

4 გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ გვერდია 5 სმ, ხოლო მოპირდაპირე კუთხე – 30°.

ა) 5 სმ; ბ) 2,5 სმ; გ) 10 სმ; დ) 1,25 სმ.

5 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 8 სმ და 11 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე – 45°.

ა) 44 სმ²; ბ) $44\sqrt{3}$ სმ²; გ) 10 სმ²; დ) $22\sqrt{2}$ სმ².

6 გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 7 სმ, 8 სმ, 9 სმ.

ა) $12\sqrt{5}$ სმ²; ბ) $24\sqrt{3}$ სმ²; გ) 24 სმ²; დ) $12\sqrt{2}$ სმ².

ამოხსენი ამოცანა N7-10.

7 გამოთვალე სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ.

8 გამოთვალე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსი, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 5 სმ, 6 სმ, 7 სმ.

9 გამოთვალე სამკუთხედის უდიდესი გვერდის მედიანა, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 2 სმ, 3 სმ, 4 სმ.

10 გამოთვალე სამკუთხედის უმცირესი კუთხის ბისექტრისა, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 5 სმ, 6 სმ, 9 სმ.

ამ თავში ისწავლი:

- სტერეომეტრიის ძირითად ცნებებსა და მათ შორის მიმართებებს;
- წრფეთა ურთიერთმდებარეობას სივრცეში;
- წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და მართობულობის პირობებს;
- პარალელური დაგეგმილების თვისებებს;
- სიბრტყეთა პარალელობისა და მართობულობის პირობებს;
- ორწახნაგა კუთხეს და კუთხეს გადამკვეთ სიბრტყეთა შორის;
- ობიექტებს შორის მანძილს სივრცეში.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- სტერეომეტრიის აქსიომების თეორემათა დასამტკიცებლად გამოყენებას;
- პარალელური და ორთოგონალური დაგეგმილების თვისებათა სტერეომეტრიული ნახაზების შედგენაში გამოყენებას;
- სივრცეში წრფეთა განლაგების შემთხვევათა დახასიათებას;
- სიბრტყის პარალელური, მართობული და დახრილი წრფეების ამოცნობასა და დახასიათებას;
- წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვას;
- სამი პერპენდიკულარის თეორემის მართი კუთხის ამოსაცნობად გამოყენებას;
- პარალელურ, გადამკვეთ და მართობულ სიბრტყეთა ამოცნობას და დახასიათებას;
- ორწახნაგა კუთხის გაზომვას;
- ორ გადამკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხის დადგენას;
- სივრცეში მდებარე ფიგურებს შორის მანძილის გაზომვას;
- პრაქტიკულ ამოცანებში სტერეომეტრიის ცნებათა და დებულებათა გამოყენებას.

კომპლექსური დავალება
„სტერეომეტრია არქიტექტურაში“
სამიზნე ცნება/ცნებები. წრფე, სიბრტყე და სივრცე

ჩვენი სამყარო სამგანზომილებიანია. ყველა ის ობიექტი, რომლებიც ჩვენ გარშემოა, სამგანზომილებიანი, ანუ სივრცითი ფიგურაა. მათ შორის სივრცითი ფიგურებია შენობა-ნაგებობები, რომელთა პროექტირება-მშენებლობა სივრცეში დაგეგმარებასა და ოპერირებას გულისხმობს. ეს კი გეომეტრიის, კერძოდ, მისი მნიშვნელოვანი ნაწილის, სტერეომეტრიის საფუძვლიან ცოდნას მოითხოვს, რადგან სწორედ სტერეომეტრია შეისწავლის სივრცით ფიგურებს შორის მიმართებებსა და მათს ზომებს.

იმას, რომ ჩვენი წინაპრები კარგად ფლობდნენ სივრცეში ობიექტთა ჰარმონიულად განლაგებისა და მყარი კონსტრუქციების აგების ხელოვნებას, ნათლად ადასტურებს მათ მიერ შექმნილი არქიტექტურული შედევრები, რომლებიც ასე მრავლადაა შემორჩენილი ჩვენს ქვეყანაში თუ მის ფარგლებს გარეთ.

დიდებული ტაძრებისა და სასახლეების გარდა, სამეურნეო საჭიროებიდან გამომდინარე, უხსოვარი დროიდან აშენებდნენ და დღესაც აშენებენ მარტივი კონსტრუქციის სხვადასხვა დანიშნულების შენობებს: ბოსლებს ცხოველებისთვის, საქათმეებს ფრინველებისთვის და სხვა.

ერთ-ერთი ასეთი მარტივი კონსტრუქციის ფართოდ გავრცელებული ნაგებობაა ქოხი, რომელსაც ბაღ-ვენახებში ავდრის ან შესვენების დროს თავშესაფრად და შრომის იარაღების შესანახად იყენებდნენ და დღესაც იყენებენ.

დავუშვათ, ერთ-ერთმა მუნიციპალიტეტმა გამოაცხადა კონკურსი ბაღ-ვენახის ქოხის პროექტზე. პროექტის მოთხოვნებია:

ა) პროექტი წარმოდგენილი უნდა იყოს მაკეტის სახით;

ბ) პროექტს უნდა დაერთოს შენობის სქემატური ნახაზი, რომელზეც უნდა მიეთითოს:

- შენობისა და მისი შემადგენელი ნაწილების გრძივი ზომები;
- ბრტყელი და ორწახნაგა კუთხეების ზომები;
- პარალელური სიბრტყეები;
- მართობული სიბრტყეები;
- პარალელური, მართობული და აცდენილი წრფეები;
- სიბრტყისადმი მართობული და დახრილი წრფეები.

გ) ცალკე ინტერიერის სქემატური ნახაზი, ავეჯის (მაგიდა, სკამი, საწოლი ან სავარძელი და სხვ.) განლაგებით, მათი ზომებისა და მათ შორის მანძილების მითითებით.

დ) დასაშვები ზომები: ქოხის ფართობი – 15 $მ^2$-დან 18 $მ^2$-მდე, სიმაღლე – არა უმეტეს 2,5 მ;

ე) თანდართული საჭირო მასალის სახეობა, რაოდენობა, ფასები;

ვ) მთლიანი ხარჯთაღრიცხვა.

შენიშვნა: უპირატესობა მიენიჭება მსუბუქი კონტრუქციის, მაგრამ მდგრად და იაფ პროექტებს.

შენი დავალება

1. მიიღე მონაწილეობა გამოცხადებულ კონკურსში და გაითვალისწინე ყველა მისი მოთხოვნა;
2. პროექტი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ შეარჩიე პროექტი;
- რა მასალა გამოიყენე პროექტისთვის, მაკეტისათვის;
- როგორ იზრუნე შენობის მდგრადობისთვის;
- როგორ შეარჩიე საჭირო სამშენებლო მასალა და როგორ დაადგინე მისი რაოდენობა;
- როგორ დაადგინე ხარჯთაღრიცხვა;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად, ნახაზების შესადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად.

4.1 სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები

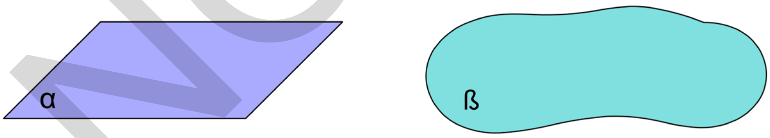
მიზანი

სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებებისა და აქსიომების გაცნობა და მათი შედეგების დასაბუთება

აქამდე ძირითადად ბრტყელ ფიგურებს და მათს თვისებებს განვიხილავდით. ბრტყელი ეწოდება ფიგურას, რომლის ყოველი წერტილი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული. მაგრამ არსებობს ფიგურები, რომელთა ერთ სიბრტყეში მოთავსება შეუძლებელია. ასეთებია, მაგალითად: კუბი, პირამიდა, მართკუთხა პარალელეპიპედი, ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი. ასეთ ფიგურებს არაბრტყელი, ანუ **სივრცითი ფიგურები** ეწოდება. ბრტყელ ფიგურებს და მათ თვისებებს შეისწავლის პლანიმეტრია, არაბრტყელ ფიგურებს და მათს თვისებებს კი – სტერეომეტრია (სტერეომეტრია ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს: სტერეო-სივრცითი, მოცულობითი, მეტრიო-ვზომავ). სიბრტყე სივრცის ნაწილია, ამიტომ ყველა ის განმარტება, თვისება და აღნიშვნა, რაც პლანიმეტრიაში გვქონდა, უცვლელად შეგვიძლია გადმოვიტანოთ სტერეომეტრიაში.

სტერეომეტრიის შესწავლა ხდება იმავე სქემით, რომლითაც შევისწავლეთ პლანიმეტრია: 1. შემოგვაქვს ძირითადი ცნებები (ისინი არ განიმარტება); 2. შემოგვაქვს აქსიომები, დებულებები, რომლებიც მიღებულია ჭეშმარიტ გამონათქვამებად (მათ არ ვამტკიცებთ); 3. გეომეტრიული ცნებები (განიმარტება ძირითად ცნებებზე დაყრდნობით); 4. თეორემები (დებულებები, რომლებსაც ვამტკიცებთ).

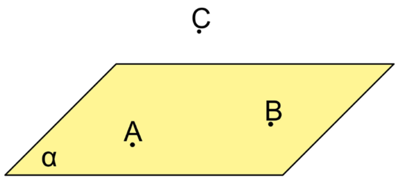
სტერეომეტრიის ძირითდი ცნებებია: წერტილი, წრფე და სიბრტყე. სიბრტყეს სივრცეში გამოსახავენ პარალელოგრამის ან მარტივი შეკრული წირის სახით. სიბრტყე აღინიშნება პატარა ბერძნული ასოებით α, β, γ, ...



წერტილები აღინიშნება ლათინური დიდი ასოებით A, B, C, ... ; წრფეებს აღნიშნავენ ერთი პატარა ლათინური ან ორი დიდი ასოთი (AB), (BC) ... .

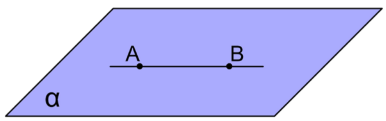
აქსიომა 1. არსებობს სიბრტყე. არსებობს წერტილები, რომლებიც სიბრტყეს ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც სიბრტყეს არ ეკუთვნის.

1-ელ ნახაზზე მოცემული A და B წერტილები სიბრტყეს ეკუთვნის, ხოლო C წერტილი – არა. მათემატიკური სიმბოლოებით ეს ასე ჩაიწერება: $A\in\alpha$; $B\in\alpha$; $C\notin\alpha$; სიბრტყეზე მდებარე და არამდებარე წერტილთა სიმრავლე სივრცეს წარმოადგენს.



ნახ. 1

აქსიომა 2. თუ ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ამ ორ წერტილზე გაივლება ერთადერთი წრფე, რომლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ამავე სიბრტყეს.



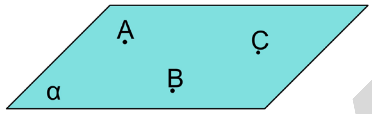
ნახ. 2

a წრფის ყოველი წერტილი ეკუთვნის α სიბრტყეს, ჩა-

იწერება ასე: $a\subset\alpha$ და ვამბობთ: „a წრფე მდებარეობს α სიბრტყეში“ ან „α სიბრტყე გადის a წრფეზე“ (ნახ. 2)

$$A\in\alpha \text{ და } B\in\alpha \Rightarrow AB\subset\alpha.$$

აქსიომა 3. ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.



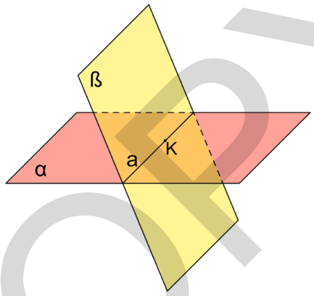
ნახ. 3

ამ აქსიომიდან გამომდინარე, სიბრტყეს სამი დიდი ლათინური ასოთიც აღნიშნავენ. (ნახ. 3)

$$\alpha=(ABC).$$

აქსიომა 4. თუ ორ α და β სიბრტყეს (ნახ. 4) გააჩნია საერთო K წერტილი, მაშინ ეს სიბრტყეები იკვეთება K წერტილზე გამავალ a წრფეზე. სიმრავლეთა თეორიის ენაზე ეს ასე ჩაიწერება:

$$K\in\alpha\cap\beta \Rightarrow K\in a \text{ და } a=\alpha\cap\beta.$$

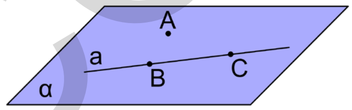


ნახ. 4

მოვიყვანოთ მოცემული აქსიომებიდან გამომდინარე ზოგიერთი შედეგი:

შედეგი 1. წრფესა და მის გარეთ აღებულ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია a წრფე და A წერტილი (ნახ. 5). a წრფეზე ავიღოთ ორი წერტილი B და C. A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. მე-3 აქსიომის თანახმად, ამ სამ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე, ხოლო მე-2 აქსიომის თანახმად, a წრფეც ამ სიბრტყეში იქნება.

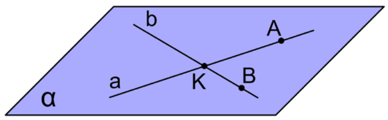


ნახ. 5

შედეგი 2. ორ გადამკვეთ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

ვთქვათ, მოცემულია ორი a და b წრფე (ნახ. 6).

$a\cap b=K$. ამ წრფეებზე ავიღოთ K-სგან განსხვავებული A და B წერტილები ... (დამოუკიდებლად გააგრძელე დამტკიცება.)



ნახ. 6

შედეგი 3. ორ პარალელურ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე (ნახ. 7) (გამომდინარეობს უშუალოდ პარალელურ წრფეთა განმარტებიდან.)

ნახ. 7

განმარტება: ორ წრფეს ეწოდება პარალელური, თუ ორივე ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. აღინიშნება a||b.

$$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a\cap b\neq\varnothing \end{array}\right\} \Leftrightarrow a\parallel b.$$

შევაჯამოთ: ერთადერთი სიბრტყე გაივლება:

1. ნებისმიერ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს;
2. წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე;
3. ორ გადამკვეთ წრფეზე;
4. ორ პარალელურ წრფეზე.

უპასუხე კითხვებს:

1. რომელია სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები?
2. რამდენი წრფე გაივლება ორ წერტილზე?
3. რამდენი სიბრტყე გაივლება სამ წერტილზე?
4. რამდენი სიბრტყე გაივლება ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე?
5. შეიძლება თუ არა წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე სიბრტყის გავლება? დადებითი პასუხის შემთხვევაში ახსენი რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება?
6. A და B წერტილები ეკუთვნის სიბრტყეს. ამავე სიბრტყეს ეკუთვნის თუ არა მათზე გამავალი წრფის სხვა წერტილები?
7. რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება მოცემულ წრფეზე?
8. რამდენი სიბრტყის გავლება შეიძლება მოცემულ წერტილზე?
9. რამდენი წრფის გავლება შეიძლება ერთ წერტილზე?

სავარჯიშოები

1 ეკუთვნის თუ არა სამკუთხედის სიბრტყეს მისი მედიანა?

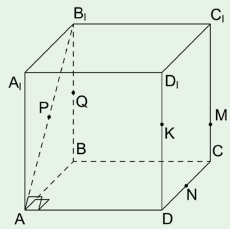
2 შეიძლება თუ არა, წრფეს და სიბრტყეს ჰქონდეს მხოლოდ სამი საერთო წერტილი? პასუხი ახსენი.

3 მოცემულია P, Q, K, M, N წერტილები. ჩამოთვლილთაგან რომელი წერტილები ეკუთვნის:

ა) (ABC) სიბრტყეს?

ბ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის BB_1 წიბოს?

გ) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის AA_1B_1B წახნაგს?



4 ნახაზის მიხედვით რომელი გამონათქვამებია ჭეშმარიტი?

ა) $T\in(AB_1D)$; ბ) $NK\subset(DCC_1)$;

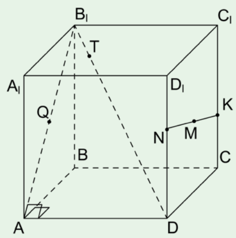
გ) $Q\notin(ABC)$; დ) $M\in(DCC_1)$;

ე) A, D, K წერტილებზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

ვ) A, Q, B_1 წერტილებზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

ზ) AA_1-ზე და CC_1-ზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;

თ) $T\in(A_1B_1C_1)$.

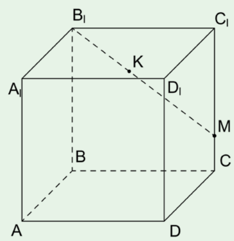


5 გაივლება თუ არა ერთადერთი სიბრტყე ნახაზის მიხედვით:

ა) B, D, D_1 წერტილებზე? ბ) A_1D და C_1D წრფეებზე?

გ) D, B, B_1 წერტილებზე?

დ) AA_1 წრფესა და K წერტილზე? ე) B_1, K, M წერტილებზე?



6 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. M წერტილი აღებულია C_1C წიბოზე. $C_1M=CM$. ააგე B_1M და BC წრფის გადაკვეთის წერტილი. იპოვე მიღებულ წერტილსა და A წვეროს შორის მანძილი, თუ კუბის წიბო a სმ-ია.

7 მოცემულია კუბი. M წერტილი აღებულია C_1C წიბოზე ისე, რომ $C_1M:MC=2:3$. $(B_1M)\cap(ABC)=N$. იპოვე AN მონაკვეთის სიგრძე, თუ კუბის წიბოს სიგრძეა a სმ.

4.2 წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა

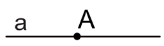
მიზანი **წერტილის, წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევების ანალიზი**

როგორ შეიძლება განლაგდნენ სივრცეში ერთმანეთის მიმართ წერტილი, წრფე და სიბრტყე? განვიხილოთ ყველა შემთხვევა:

1. წერტილი და წრფე

ა) წერტილი მდებარეობს წრფეზე: $A\in a$ (ნახ. 1ა);

ბ) წერტილი არ მდებარეობს წრფეზე: $A\notin a$ (ნახ. 1ბ).



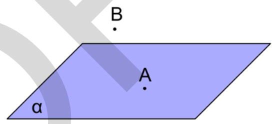
ნახ. 1ა

ნახ. 1ბ

2. წერტილი და სიბრტყე

ა) წერტილი მდებარეობს სიბრტყეზე: $A\in\alpha$ (ნახ. 2);

ბ) წერტილი არ მდებარეობს სიბრტყეზე (ან წერტილი მდებარეობს სიბრტყის გარეთ): $B\notin\alpha$ (ნახ. 2).



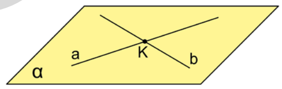
ნახ. 2

3. წრფე და წრფე

ა) წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში: $a\cap b=K$. ასეთ წრფეებს ურთიერთკვეთი წრფეები ეწოდება (ნახ. 3ა);

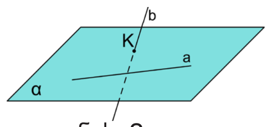
ბ) წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს და საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. $a\cap b=\varnothing$. $a\subset\alpha$; $b\subset\alpha$ ასეთ წრფეებს პარალელური წრფეები ეწოდება და ასე ჩაიწერება: $a\parallel b$ (ნახ. 3ბ);

გ) წრფეები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. ასეთ წრფეებს აცდენილი წრფეები ეწოდება. აცდენილი წრფეები აღინიშნება „∸“ სიმბოლოთი. $a \dot{-} b$ ჩანაწერი ნიშნავს, რომ a და b აცდენილი წრფეებია (ნახ. 3გ).



ნახ. 3ა

ნახ. 3ბ

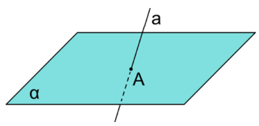


ნახ. 3გ

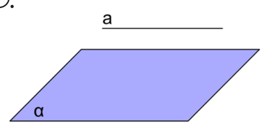
4. წრფე და სიბრტყე

ა) a წრფე კვეთს α სიბრტყეს A წერტილში. $a\cap\alpha=A$. a წრფეს ეწოდება α სიბრტყის მკვეთი წრფე (ნახ. 4ა);

ბ) a წრფესა და α სიბრტყეს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. $a\cap b=\varnothing$. ამ შემთხვევაში წრფესა და სიბრტყეს ურთიერთპარალელური ეწოდება. აღინიშნება: $a\parallel\alpha$ (ნახ. 4ბ).



ნახ. 4ა

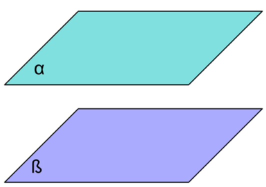


ნახ. 4ბ

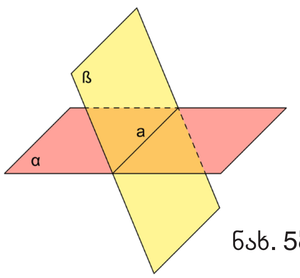
5. სიბრტყე და სიბრტყე

ა) სიბრტყეებს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ. $\alpha\cap\beta=\varnothing$. ასეთ სიბრტყეებს პარალელური სიბრტყეები ეწოდება. აღინიშნება: $\alpha\parallel\beta$ (ნახ. 5ა);

ბ) მკვეთი სიბრტყეები. (აქსიომის თანახმად იკვეთებიან წრფეზე). $\alpha\cap\beta=a$ (ნახ. 5ბ).



ნახ. 5ა



ნახ. 5ბ

განვიხილოთ წრფეთა ურთიერთმდებარეობის შემთხვევები. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ წრფეს?

როცა წრფეები ემთხვევა, მაშინ საერთო წერტილთა რაოდენობა უსასრულოა. ამ შემთხვევაში, ფაქტობრივად, გვაქვს ერთი წრფე.

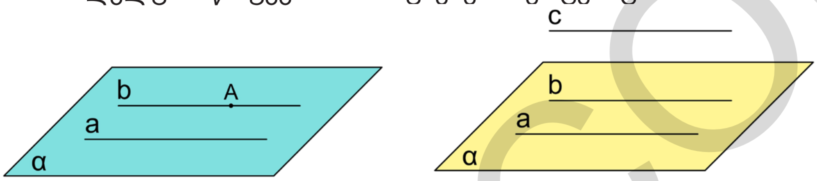
თუ ორ წრფეს აქვს ერთი საერთო წერტილი, მათ მკვეთი წრფეები ვუწოდეთ. მათ სხვა გადამკვეთი წერტილი ვერ ექნება, რადგან ორ განსხვავებულ წერტილზე გაივლება მხოლოდ ერთი წრფე.

გავიხსენოთ პარალელურ წრფეთა თვისებები:

ა) წრფის გარეთ აღებულ წერტილზე შეიძლება მოცემული წრფის ერთადერთი პარალელური წრფის გავლება;

ბ) თუ ორი წრფიდან თითოეული მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

ამ თვისებებს პარალელური წრფეები ინარჩუნებენ სივრცეშიც.

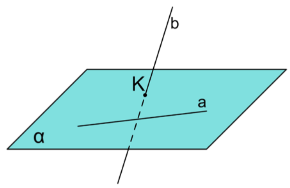


რაც შეეხება აცდენილ წრფეებს, ისინი ერთმანეთის პარალელური ვერ იქნება, რადგან ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ.

გავეცნოთ აცდენილ წრფეთა ნიშანს (დამტკიცების გარეშე).

თეორემა: თუ b წრფე კვეთს α სიბრტყეს K წერტილში, რომელიც α სიბრტყეში მდებარე a წრფეზე არ მდებარეობს, მაშინ a და b აცდენილი წრფეებია.

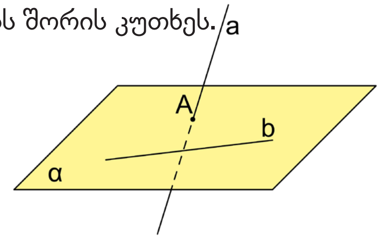
$$\left.\begin{aligned} b \cap \alpha = K \\ a \subset \alpha \\ K \notin a \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \div b$$

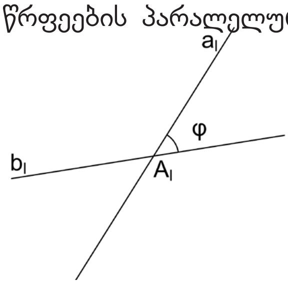


როგორც პლანიმეტრიიდანაა ცნობილი, ორ გადამკვეთ წრფეს შორის კუთხე გადაკვეთისას მიღებულ კუთხეებს შორის უმცირესს ეწოდება. თუ წრფეები ემთხვევა ან პარალელურია, მათ შორის კუთხე 0^o-ის ტოლადაა მიღებული. წრფეებს შორის კუთხე φ-ასოთი აღვნიშნოთ. თუ $\varphi=90^o$, ასეთ წრფეებს მართობული წრფეები ეწოდება და ვწერთ: $a \perp b$.

განმარტება: ორ აცდენილ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების პარალელურ ურთიერთგადამკვეთ წრფეებს შორის კუთხეს.

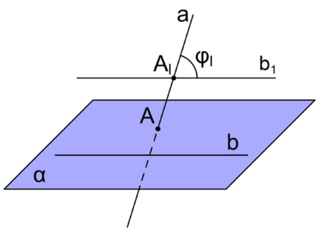
$a_1 \cap b_1 = A_1$
$a_1 \parallel a$
$b_1 \parallel b$



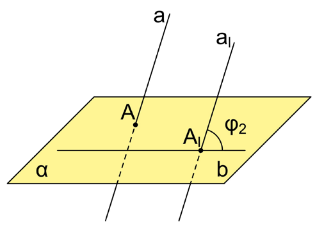


შესაძლებელია, და მოსახერხებელი იქნება, თუ A_1 წერტილს ავიღებთ a წრფეზე (ნახ. 1ა) ან b წრფეზე (ნახ. 1ბ)

$\varphi_1=\varphi_2=\varphi$



ნახ. 1ა

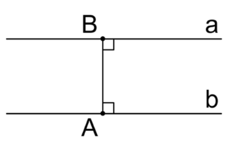


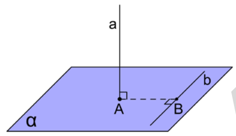
ნახ. 1ბ

თუ a_1 და b_1 წრფეებს შორის კუთხე 90°-ია, ე.ი. $a_1 \perp b_1$, მაშინ a და b წრფეებს შორის კუთხეც 90°-ია და $a \perp b$. ასეთ წრფეებს აცდენილი მართობული წრფეები ეწოდება.

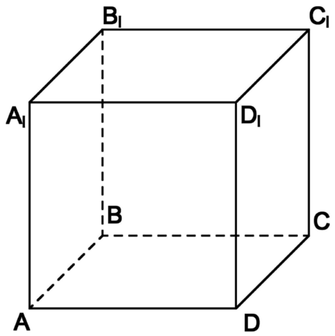
აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე 0° ვერ იქნება, (ახსენი, რატომ?), ასე, რომ: $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$.

ორ პარალელურ ან ორ აცდენილ წრფეს შორის მანძილი ეწოდება მათი საერთო მართობის სიგრძეს.



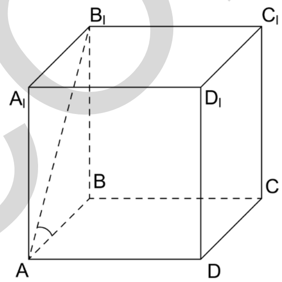


ნახაზზე a და b წრფეებს შორის მანძილი AB მონაკვეთის სიგრძეა.



კუბში AA_1 და C_1D_1 აცდენილი წრფეებია. მათი საერთო მართობია A_1D_1 წიბო. ამიტომ, AA_1 და C_1D_1 წრფეებს შორის მანძილია A_1D_1 წიბოს სიგრძე.

ამოცანა 1. მოცემულია კუბი. ვიპოვოთ AB_1 და CD აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე.



ამოხსნა. $AB \| CD$ (ახსენი, რატომ?) განმარტების თანახმად, საძებნი კუთხე ტოლი იქნება $\angle B_1AB$-სი. ეს კი 45°-ის ტოლია. (ახსენი, რატომ?).

უპასუხე კითხვებს:

1. რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს ორ წრფეს?
2. შეიძლება, რომ ორ წრფეს ჰქონდეს მხოლოდ სამი საერთო წერტილი?
3. როდის ეწოდება წრფეს სიბრტყის პარალელური?
4. რომელია მართებული გამონათქვამი? თუ ორ წრფეს საერთო წერტილი არ გააჩნია, მაშინ ისინი:

ა) პარალელურია;

ბ) აცდენილია;

გ) ან პარალელურია ან აცდენილი.

5. როგორ წრფეებს ეწოდება პარალელური?
6. როგორ წრფეებს ეწოდება აცდენილი?
7. რაში მდგომარეობს აცდენილ წრფეთა ნიშანი?
8. რას ეწოდება წრფეებს შორის კუთხე?
9. რას ეწოდება მართობული წრფეები?
10. რას ეწოდება აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე? მანძილი?

სავარჯიშოები

1

რამდენი სიბრტყე გაივლება ორ წერტილზე?

ა) ორი; ბ) უამრავი; გ) არცერთი; დ) ერთი.

2

თუ a და b აცდენილი წრფეებია. მაშინ ისინი:

ა) ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ; ბ) იკვეთებიან;

გ) ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ; დ) პარალელურია.

3

თუ a და b წრფე იკვეთება, მაშინ:

ა) a და b წრფეზე არ გაივლება სიბრტყე;

ბ) a და b წრფეზე გაივლება ორი სიბრტყე;

გ) a და b წრფეზე გაივლება უამრავი სიბრტყე;

დ) a და b წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

4

თუ $A \in \alpha$ და $B \in \alpha$, მაშინ:

ა) AB წრფე კვეთს α სიბრტყეს;

ბ) AB ძევს α სიბრტყეზე;

გ) AB წრფე α სიბრტყის პარალელურია;

დ) AB წრფეზე არ გაივლება სიბრტყე.

5

საკლასო ოთახში მონახე აცდენილ წრფეთა წყვილები და მიუთითე მათ შორის მანძილი.

6

ქვემოთ მოცემული გამონათქვამებიდან რომელია მართებული? მცდარი გამონათქვამის შემთხვევაში მოიყვანე კონტრმაგალითი.

ა) $\begin{cases} a \parallel b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$; ბ) $\begin{cases} a \dot{-} b \\ b \dot{-} a \end{cases} \Rightarrow a \dot{-} c$; გ) $\begin{cases} a \dot{-} b \\ b \parallel a \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$.

7

ორი წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით. რამდენი სიბრტყე გაივლება ამ სამ წრფეზე? განიხილე ორი განსხვავებული შემთხვევა.

8

ქვემოთ მოცემული ორი გამონათქვამიდან რომელია ჭეშმარიტი?

ა) თუ წრეწირის ორი წერტილი მდებარეობს მოცემულ სიბრტყეზე, მაშინ ეს წრეწირი მდებარეობს ამავე სიბრტყეზე;

ბ) თუ წრეწირის სამი წერტილი მდებარეობს სიბრტყეზე, მაშინ წრეწირი მდებარეობს ამავე სიბრტყეზე.

9

მოცემულია კუბი. იპოვე კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

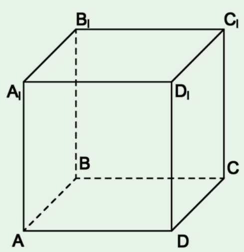
ა) AB და BC;

ბ) AB და CD;

გ) AB და A_1B_1;

დ) AB და CC_1;

ე) AB_1 და C_1C.



10 მოცემულია კუბი. $M \in CC_1$, $N \in CD$.

ა) იპოვე კუთხე MN წრფესა და AB წრფეს შორის. M და N წიბოების შუაწერტილებია.

ბ) იპოვე MN მონაკვეთის სიგრძე, თუ კუბის წიბოა a სმ.

11 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის A_1, C_1 და D წვეროებზე გავლებულია α სიბრტყე. შეასრულე შესაბამისი ნახაზი და მიუთითე შემდეგი ფიგურები:

ა) $\alpha \cap (DCC_1)$;

ბ) $\alpha \cap (A_1B_1C_1)$;

გ) $\alpha \cap (AA_1D_1)$;

დ) $\alpha \cap$კუბთან.

იპოვე α სიბრტყის კუბთან თანაკვეთით მიღებული ფიგურის პერიმეტრი და ფართობი, თუ კუბის წიბოა a სმ.

12 სკიდან სამი ფუტკარი ამოფრინდა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ 10 წუთის შემდეგ სამივე ფუტკარი ერთ სიბრტყეში იქნება?

შესაძლებელია თუ არა?

რომ ორი აცდენილი წრფიდან თითოეული მესამე წრფის პარალელური იყოს?

აბა, სცადე!

სიბრტყეზე მოცემულია წრეწირი. მასზე მონიშნულია რამდენიმე წერტილი. სიბრტყის გარეთ აღებული წერტილიდან მონიშნულ წერტილებზე გავლებულია სხივები. ყოველ ორ სხივზე გავლებულია სიბრტყე. სიბრტყეთა რაოდენობა აღმოჩნდა 45. იპოვეთ მონიშნულ წერტილთა რაოდენობა.

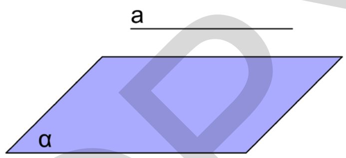
4.3 წრფისა და სიბრტყის პარალელობა

მიზანი **წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშნების დადგენა.**

წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის ერთ-ერთი შემთხვევაა, როცა წრფესა და სიბრტყეს საერთო წერტილი არ აქვთ.

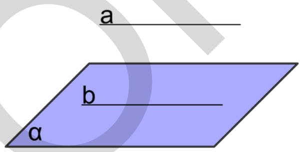
განმარტება: წრფესა და სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ.

a წრფისა და α სიბრტყის პარალელობას $a \parallel \alpha$ ან $\alpha \parallel a$ ჩანაწერით აღნიშნავენ: $a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a \parallel \alpha$.



თეორემა 1. (წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი)

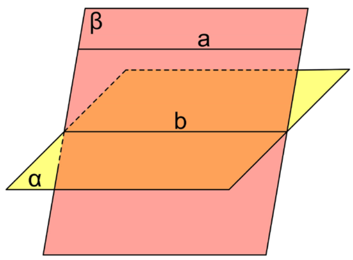
თუ α სიბრტყეზე არამდებარე a წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე რომელიმე b წრფის პარალელურია, მაშინ a წრფე α სიბრტყის პარალელურია.



დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, a წრფე კვეთს α-ს რაიმე A წერტილში. A წერტილი ვერ იქნება b წრფეზე, რადგან $a \parallel b$ ($a \cap b = \varnothing$). გამოდის, რომ a და b წრფეები აცდენილი წრფეებია (აცდენილი წრფეების ნიშნის თანახმად). ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $a \parallel b$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ β სიბრტყე გადის α სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე და კვეთს α სიბრტყეს b წრფეზე, მაშინ a და b წრფეები პარალელურია.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, a წრფე კვეთს b წრფეს რაიმე A წერტილში, $a \cap b = A$. რადგან $A \in b$, b კი მდებარეობს α სიბრტყეში, გამოდის, რომ $A \in \alpha$; მივიღეთ $A \in a$ და $A \in \alpha$, ე.ი. a წრფეს და α სიბრტყეს აქვთ საერთო წერტილი, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.



ამ თეორემიდან გამომდინარეობს **შედეგი** (დაამტკიცე დამოუკიდებლად):

თუ ორი პარალელური წრფიდან თითოეულზე გავლებულია სიბრტყე ისე, რომ ეს სიბრტყეები იკვეთება, მაშინ გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფეების პარალელურია.

$$\begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = c \\ a \parallel b \end{cases} \to \begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases}$$

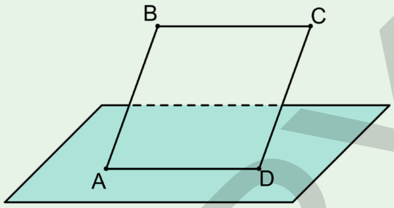
უპასუხე კითხვებს:

1. როდის ეწოდება წრფეს და სიბრტყეს პარალელური?
2. რაში მდგომარეობს წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი?
3. მართებულია თუ არა დებულება: „თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ეს წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის პარალელურია“?
4. a წრფე პარალელურია α სიბრტყის. A წრფეზე გატარებულმა სიბრტყემ გადაკვეთა α სიბრტყე b წრფეზე. იქნება თუ არა b წრფე a წრფის პარალელური?

სავარჯიშოები

1 დახაზე α სიბრტყე და მისი პარალელური a წრფე. α სიბრტყეზე დახაზე ერთი a-ს პარალელური და ერთი a-სთან აცდენილი წრფე.

2 α სიბრტყე გადის $ABCD$ მართკუთხედის AD გვერდზე და $B \notin \alpha$. დაამტკიცე, რომ $BC \parallel \alpha$ (ნახ.1).



ნახ. 1

3 α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. $C \notin \alpha$. შეიძლება თუ არა AC და BC გვერდების შუაწერტილებზე გამავალმა წრფემ α სიბრტყე გადაკვეთოს?

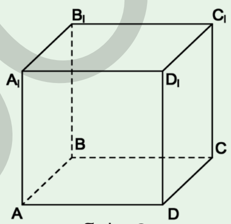
4 α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AC და BC გვერდების M და N შუაწერტილებზე. ა) დაამტკიცე, რომ $AB \parallel \alpha$; ბ) იპოვე AB, თუ $MN=4$ სმ.

5 მე-2 ნახაზის მიხედვით ქვემოთ მოცემული რომელი გამონათქვამია ჭეშმარიტი?

ა) $AB \parallel (CDC_1)$; ბ) $AB \parallel (A_1B_1C_1)$;

გ) $AB \parallel (ABB_1)$; დ) $(ABC) \parallel B_1C_1$;

ე) $(ABC) \parallel A_1B_1$

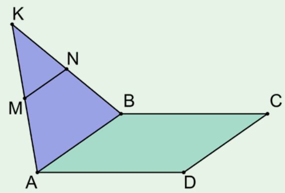


ნახ. 2

6 მე-3 ნახაზზე მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი და ABK სამკუთხედი. $K \notin (ABC)$. M და N წერტილები BK და AK გვერდების შუაწერტილებია.

ა) დაამტკიცე, რომ $MN \parallel (ABC)$;

ბ) იპოვე MN, თუ $CD=10$სმ



ნახ. 3

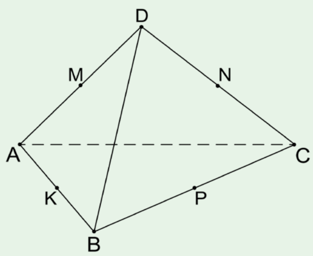
7 α სიბრტყე გადის $ABCD$ ოთხკუთხედის AD გვერდზე. $B \notin \alpha$. $\angle BCA = \angle DAC$. დაამტკიცე, რომ $BC \parallel \alpha$.

8 მოცემულია პირამიდა. M, N , K და P წერტილები შესაბამისად, AD, DC, AB და BC წიბოების შუა წერტილებია.

ა) დაამტკიცე, რომ $MN \parallel AC$;

ბ) დაამტკიცე, რომ ამ წერტილების შეერთებით მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია;

გ) გამოთვალე პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ $AC=12$სმ და $DB=8$სმ.



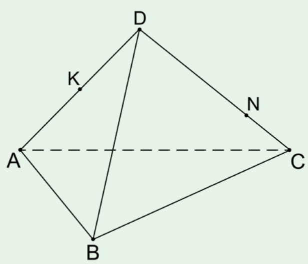
9 სამკუთხა პირამიდაში ყველა წიბო a სმ-ის ტოლია, $DN:NC=3:1$, $KD=AK$, $DN>NC$.

ა) გადაკვეთს თუ არა KN წრფე ABC სიბრტყეს?

ბ) ააგე გადაკვეთის წერტილი $KN \cap (ABC)$;

გ) იპოვე მანძილი ამ გადაკვეთის წერტილიდან A წვერომდე;

დ) იპოვე მანძილი გადაკვეთის წერტილიდან AB წიბოს შუაწერტილამდე.

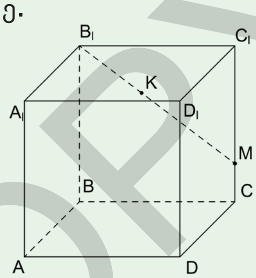


ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №7.

1 ქვემოთ მოცემული რომელი დებულებაა მცდარი?

ა) ორ პარალელურ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;
ბ) წრფესა და მასზე არამდებარე წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;
გ) წრფესა და მასზე მდებარე წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე;
დ) ორ გადამკვეთ წრფეზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე.

2 რომელ წახნაგს ეკუთვნის K წერტილი?

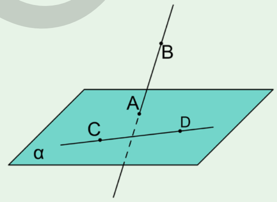


ა) $(A_1B_1C_1)$; ბ) (D_1DC);
გ) (B_1BC); დ) (A_1AD).

3 რამდენი სიბრტყე გაივლება ორ განსხვავებულ წრფეზე?

ა) არ გაივლება; ბ) უამრავი;
გ) მხოლოდ ერთი; დ) ერთი ან არცერთი.

4 ნახაზზე მოცემულია წერტილებისა და წრფეების განლაგება სივრცეში. ეს განლაგება ჩაწერილია მათემატიკური სიმბოლოებით. რომელი ჩანაწერია არასწორი?



ა) $A \in \alpha$; გ) $CD \subset \alpha$;
ბ) $AB \cap CD = \varnothing$; დ) $D \notin \alpha$.

5 მოცემულია სამი წერტილი: A, B, C. AB=3სმ, BC=4სმ, AC=7სმ. რამდენი სიბრტყე გაივლება ამ სამ წერტილზე?

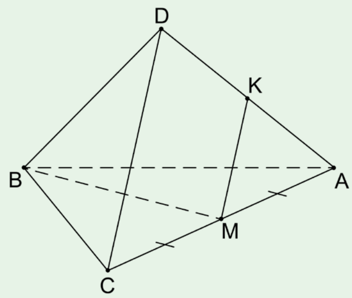
ა) ერთი; ბ) უამრავი; გ) არცერთი; დ) შეუძლებელია დადგენა.

6 კუბში AA_1 წიბოს აცდენილ წიბოთა რაოდენობა რამდენით მეტია მის პარალელურ წიბოთა რაოდენობაზე?

ა) 1-ით; ბ) 2-ით; გ) 3-ით; დ) 4-ით.

7 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. გაავლე სიბრტყე BB_1 და DD_1 წიბოებზე. იპოვე კვეთაში მიღებული ფიგურის პერიმეტრი, თუ კუბის წიბოა a.

8 მოცემულ პირამიდაში K და M წერტილები წიბოების შუაწერტილებია. ააგე BM-ზე და MK-ზე გამავალი კვეთა და იპოვე მიღებული კვეთის პერიმეტრი, თუ ყველა წიბოს სიგრძეა a სმ.



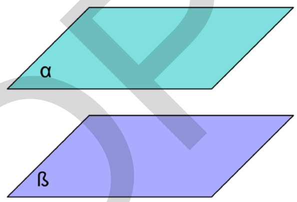
4.4 სიბრტყეების პარალელურობა

მიზანი

პარალელურ სიბრტყეთა ნიშნებისა და თვისებების გაცნობა.

როგორც 2.1 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, გვაქვს სიბრტყეების ურთიერთმდებარეობის სამი შემთხვევა:

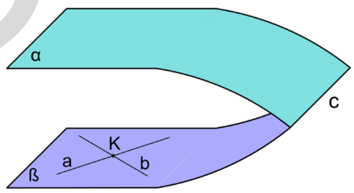
1. სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევა (ფაქტობრივად, გვაქვს ერთი სიბრტყე);
2. სიბრტყეებს საერთო წერტილი არ გააჩნიათ;
3. სიბრტყეები იკვეთება.



განმარტება: ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ მათ საერთო წერტილი არ გააჩნია. $\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$.

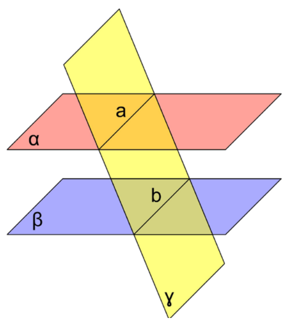
თეორემა 1. (ორი სიბრტყის პარალელობის ნიშანი): თუ ერთი სიბრტყე მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის პარალელურია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

დამტკიცება. მოცემულია α და β სიბრტყეები. a და b სიბრტყეში მდებარე გადამკვეთი წრფეებია: $a \cap b = K$, ამასთან, $\alpha \parallel a$ და $\alpha \parallel b$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \parallel \beta$.



დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ α და β არ არის პარალელური და ერთმანეთს კვეთს რაიმე c წრფეზე. თეორემის (წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშანი) თანახმად, რადგან β გადის α-ს პარალელურ a წრფეზე, გადაკვეთის c წრფე a წრფის პარალელურია. ანალოგიურად, $c \parallel b$. a,b c წრფეები β სიბრტყეში მდებარეობენ. გამოდის, რომ c-ს გარეთ აღებულ K წერტილზე გავლია მისადმი ორ პარალელურ წრფეს, $c \parallel a$, $c \parallel b$, რაც ეწინააღმდეგება პარალელობის აქსიომას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთისას მიღებული წრფეები პარალელურია.

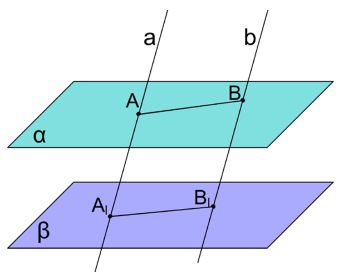


დამტკიცება. მოცემულია: $\alpha \parallel \beta$. $\gamma \cap \alpha = a$; $\gamma \cap \beta = b$.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $a \parallel b$;

a და b წრფეები γ სიბრტყეშია. მათ რომ ერთმანეთი გადაეკვეთათ რაიმე K წერტილში, ეს K წერტილი ერთდროულად აღმოჩნდებოდა როგორც α, ისე β სიბრტყეში, ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $\alpha \parallel \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია.



მოცემულია: $\alpha \parallel \beta$; $a \parallel b$; გადაკვეთის წერტილები A, B, A_1, B_1;

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $AA_1 = BB_1$;

დამტკიცება: $a \parallel b$ გავავლოთ მათზე სიბრტყე. ეს სიბრტყე α და β სიბრტყეებს გადაკვეთს AB და A_1B_1 წრფეებზე.

თეორემა 2-ის თანახმად $AB \parallel A_1B_1$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a \parallel b$, მაშინ AA_1B_1B მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, ამიტომ $AA_1 = BB_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია კიდევ ორი თვისება:

- სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე გაივლება მოცემული სიბრტყის პარალელური ერთადერთი სიბრტყე.
- თუ ორი სიბრტყიდან თითოეული მესამე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მოცემული ორი სიბრტყე პარალელურია.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა შემთხვევაში ეწოდება ორ სიბრტყეს პარალელური?
2. რაში მდგომარეობს სიბრტყეების პარალელობის ნიშანი?
3. თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, რა შეიძლება ითქვას გადაკვეთისას მიღებული წრფეების შესახებ?
4. პარალელური სიბრტყეები გადაკვეთილია პარალელური წრფეებით. ტოლია თუ არა ამ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული პარალელურ წრფეთა მონაკვეთები?
5. მართებულია თუ არა ჩანაწერი: „$\alpha \parallel \beta$ და $\beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$“?
6. რამდენ ნაწილად დაიყოფა სივრცე სამი პარალელური სიბრტყით?

სავარჯიშოები

1 α სიბრტყე გადის β სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე. რა შეიძლება ითქვას α და β სიბრტყეთა შესახებ?

ა) α აუცილებლად კვეთს β-ს; ბ) $\alpha \parallel \beta$;

გ) α არ შეიძლება იყოს β-ს პარალელური;

დ) α შეიძლება კვეთდეს β-ს.

2 სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის რამდენი პარალელური სიბრტყე გაივლება?

ა) ერთადერთი; ბ) არცერთი; გ) ორი; დ) უამრავი.

3 სიბრტყის პარალელურ წრფეზე გაივლება მოცემული სიბრტყის პარალელური:

ა) უამრავი სიბრტყე; ბ) არ გაივლება სიბრტყე;

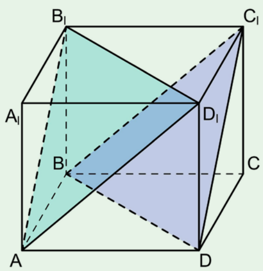
გ) მხოლოდ ერთი სიბრტყე; დ) ორი სიბრტყე.

4 გაარკვიე, ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: „თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთ-ერთ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფე მეორე სიბრტყის პარალელურია“. (პასუხი ახსენი.)

5 პარალელურ წახნაგთა რამდენი წყვილი აქვს კუბს?

ა) ერთი; ბ) ორი; გ) სამი; დ) ოთხი.

6 დაამტკიცე, რომ კუბის მოპირდაპირე წახნაგების გადამკვეთი სიბრტყე წახნაგებიდან მოკვეთს პარალელურ მონაკვეთებს.



7 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. დაამტკიცე, რომ AB_1 და DC_1 დიაგონალები პარალელურია.

8 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. დაამტკიცე, რომ $(AB_1D_1) \parallel (BDC_1)$. იპოვე AB_1D_1 და C_1BD სამკუთხედების ფართობები, თუ წიბოს სიგრძეა 6სმ.

9 დაამტკიცე, რომ თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფე პარალელურია მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

10 DABC პირამიდის ფუძეა ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის AB ჰიპოტენუზაა 20 სმ და $\sin\angle A=\frac{3}{5}$. DC წიბოზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $\frac{DM}{MC}=\frac{2}{3}$ და მასზე გავლებულია (ABC) სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. იპოვე კვეთაში მიღებული სამკუთედის: ა) პერიმეტრი; ბ) ფართობი;

11 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის AD=12 სმ, CD=5 სმ, CC_1=6 სმ. A_1B_1 წიბოზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $A_1M:MB_1=5:8$ და მასზე გატარებულია (BB_1D_1) სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. იპოვე კვეთაში მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

12 მოცემულია DABC პირამიდა. მისი ABC ფუძის პერიმეტრია 20 სმ. AD წიბოზე აღებულია ორი M და N წერტილი ისე, რომ AM:MN:ND=3:2:1; ამ წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტყეები.
იპოვე: ა) კვეთაში მიღებული სამკუთხედების პერიმეტრი.
ბ) კვეთაში მიღებული სამკუთხედების ფართობთა შეფარდება.

აბა, სცადე!

შეადგინე ოთხი ტოლი სამკუთხედი ასანთის 6 ღერით.

4.5 პარალელური დაგეგმილება სიბრტყეზე და მისი თვისებები

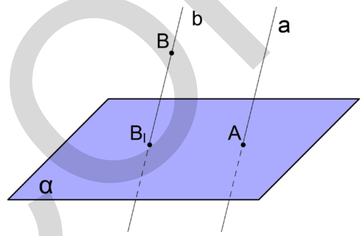
მიზანი

სიბრტყეზე სივრცითი ფიგურის გამოსახვის მეთოდების განხილვა

როგორც აღვნიშნეთ, სივრცითი ფიგურის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს. მის ნახაზს თუ ნახატს ვასრულებთ ფურცელზე. ფურცლის ზედაპირი მხოლოდ სიბრტყის ნაწილის მოდელია.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სივრცითი ფიგურა „გადაგვაქვს" სიბრტყეზე, რომელიც შეესაბამება ჩვენს მხედველობით აღქმას.

სიბრტყეზე სივრცითი ფიგურების გამოსახვის ერთ-ერთი ხერხი არის პარალელური დაგეგმილება.



ვთქვათ, მოცემულია α სიბრტყე და მისი გადამკვეთი a წრფე. $a\cap\alpha=A$

ავიღოთ სიბრტყის გარეთ რაიმე B წერტილი და გავავლოთ მასზე a წრფის პარალელური b წრფე. $B_1=\alpha\cap b$.

B_1 წერტილს ეწოდება B წერტილის გეგმილი a წრფის მიმართ α სიბრტყეზე. აღინიშნება: $გეგ_\alpha B=B_1$.

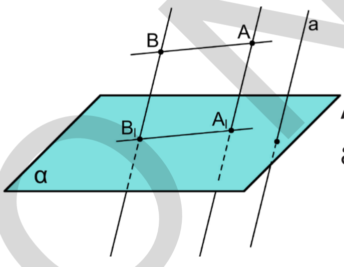
თუ მოცემული გვაქვს რაიმე F ფიგურა და ასეთი წესით ავაგებთ მისი ყოველი წერტილის გეგმილს, მივიღებთ F_1 ფიგურას, რომელსაც F ფიგურის გეგმილი ეწოდება და იწერება: $გეგ_\alpha F=F_1$. F_1 არის F ფიგურის გამოსახულება α სიბრტყეზე.

თუ B წერტილი ძევს α სიბრტყეზე, მაშინ მისი გეგმილი თვითონ B წერტილია.

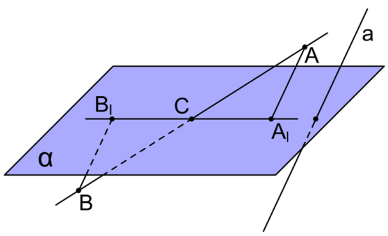
თუ ვაგეგმილებთ a წრფის პარალელურ მონაკვეთს, მაშინ მისი გეგმილი იქნება წერტილი. ასეთ დაგეგმილებას არ განვიხილავთ.

პარალელურ დაგეგმილებას აქვს შემდეგი თვისებები (მოგვყავს დამტკიცების გარეშე):

1. **წრფის გეგმილი წრფეა.**

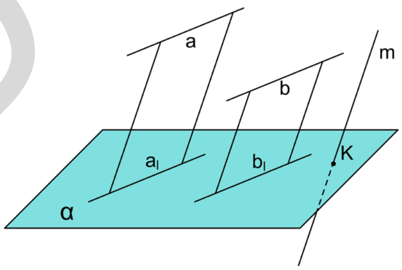


$AB\parallel\alpha$. $გეგ_\alpha AB=A_1B_1$.



$AB\nparallel\alpha$. $გეგ_\alpha AB=A_1B_1$.

2. **პარალელურ წრფეთა გეგმილები პარალელურია.**



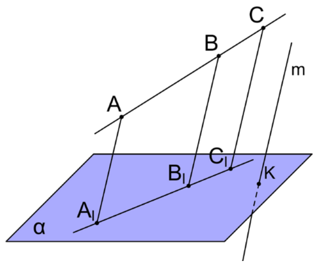
$გეგ_\alpha a=a_1$, $გეგ_\alpha b=b_1$,
$a\parallel b\Rightarrow a_1\parallel b_1$

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ფიგურის პარალელური მონაკვეთების გეგმილები პარალელური მონაკვეთებია.

3. ერთ წრფეზე აღებული მონაკვეთების ან პარალელური წრფეების მონაკვეთების შეფარდება მათი გეგმილების შეფარდების ტოლია.

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ მონაკვეთის შუა წერტილი მისი გეგმილის შუაწერტილზე გეგმილდება. $AB=BC \Rightarrow A_1B_1=B_1C_1$.

საზოგადოდ, პარალელური დაგეგმილებისას მონაკვეთის სიგრძე და კუთხის სიდიდე იცვლება.



$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$

შენიშვნა 1: ტრაპეციის გამოსახვისას უნდა შენარჩუნდეს ფუძეების შეფარდება.

შენიშვნა 2: მართი კუთხის მქონე ფიგურა უნდა გამოვსახოთ მართი კუთხის მინიშნებით, ხოლო ტოლი გვერდების მქონე ფიგურა – ტოლი გვერდების მინიშნებით.

დასკვნა: პარალელური დაგეგმილებისას ნარჩუნდება:

1. პარალელურობა.
2. პარალელურ მონაკვეთთა სიგრძეთა შეფარდება.

საზოგადოდ არ ნარჩუნდება: 1. მონაკვეთის სიგრძე, 2. კუთხის ზომა.

პარალელურ დაგეგმილებას, როცა $a \perp \alpha$, სადაც a არის წრფე, რომლის მიხედვითაც ვაგეგმილებთ, ხოლო α – სიბრტყე, რომელზეც ვაგეგმილებთ, ეწოდება **მართობული,** ანუ **ორთოგონალური** დაგეგმილება. რას ნიშნავს წრფე მართობულია სიბრტყის? – ამასთან დაკავშირებულ საკითხებს გავეცნობით შემდეგ პარაგრაფში.

უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება წერტილის (ფიგურის) გეგმილი?
2. რა ძირითადი თვისებებით ხასიათდება პარალელური დაგეგმილება?
3. რა არის ორთოგონალური დაგეგმილება?
4. რას წარმოადგენს წრფის გეგმილი? მონაკვეთის?
5. $a \parallel b$. შეიძლება, რომ მათი გეგმილები იკვეთებოდეს?
6. თუ a და b წრფეები იკვეთება, შეიძლება რომ მათი გეგმილები პარალელური იყოს?
7. შეიძლება, რომ ტრაპეციის გეგმილი იყოს პარალელოგრამი?
8. შეიძლება, რომ მართკუთხედის გეგმილი იყოს: ა) პარალელოგრამი? ბ) ტრაპეცია?
9. შესაძლებელია, რომ სამკუთხედის გეგმილი ამ სამკუთხედის ტოლი იყოს? პასუხი დაასაბუთე.

სავარჯიშოები

1 პარალელური დაგეგმილებისას სამკუთხედის მედიანის გამოსახულება აუცილებლად იქნება:

ა) სიმაღლე;

ბ) ბისექტრისა;

გ) მედიანა;

დ) შუახაზი.

2

პარალელური დაგეგმილებისას სამკუთხედის შუახაზის გამოსახულება აუცილებლად იქნება:

ა) მედიანა;

ბ) გვერდის პარალელური ნებისმიერი მონაკვეთი;

გ) ბისექტრისა;

დ) შუახაზი.

3

პარალელური დაგეგმილებისას ორი გადამკვეთი წრფის გამოსახულება იქნება:

ა) პარალელური წრფეები;

გ) ერთი წრფე;

ბ) აცდენილი წრფეები;

დ) გადამკვეთი წრფეები.

4

პარალელური დაგეგმილებისას კვადრატის გამოსახულება არ შეიძლება იყოს:

ა) ტრაპეცია;

ბ) კვადრატი;

გ) რომბი;

დ) პარალელოგრამი.

5

ააგე ტოლფერდა სამკუთხედისა და მისი ფუძისადმი გავლებული ბისექტრისის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულება.

6

ააგე ტოლფერდა ტრაპეციისა და მისი სიმაღლის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულება.

7

ააგე წესიერი ექვსკუთხედის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულება.

აბა, სცადე!

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3სმ და 6 სმ. ააგე ამ სამკუთხედისა და ჰიპოთენუზისადმი გავლებული მედიანის, ბისექტრისისა და სიმაღლის პარალელური დაგეგმილებით მიღებული გამოსახულებები.

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №8.

1 სამკუთხედის სიბრტყე პარალელურია α სიბრტყის. ამოირჩიე მცდარი დებულება:

ა) სამკუთედის შუახაზი პარალელურია α სიბრტყის;

ბ) სამკუთხედის შუახაზებით შედგენილი სამკუთხედი პარალელურია α სიბრტყის;

გ) სამკუთხედის მედიანა პარალელურია α სიბრტყის;

დ) სამკუთხედის ბისექტრისა არაა α სიბრტყის პარალელური.

2 ტრაპეციის ფერდები α სიბრტყის პარალელურია. რომელი დებულებაა მართებული?

ა) ტრაპეციის სიბრტყე და α სიბრტყე იკვეთება;

ბ) ტრაპეციის ფუძეები კვეთს α სიბრტყეს;

გ) ტრაპეციის სიბრტყე აცდენილია α სიბრტყის;

დ) ტრაპეციის სიბრტყე პარალელურია α სიბრტყის.

3 მოცემულია α და β პარალელური სიბრტყეები. $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$. რომელი დებულებაა მართებული:

ა) აუცილებლად $a \parallel b$; ბ) აუცილებლად $a \dot{-} b$;

გ) შეიძლება $a \dot{-} b$; დ) a წრფე კვეთს b წრფეს.

4 პარალელურ წახნაგთა რამდენი წყვილი აქვს მართკუთხა პარალელოპიპედს,

ა) ერთი; ბ) ორი; გ) სამი; დ) ოთხი.

5 ტრაპეციის ფუძეებია 4 სმ. და 8 სმ. პარალელური დაგეგმილიებისას მისი გამოსახულება შეიძლება იყოს:

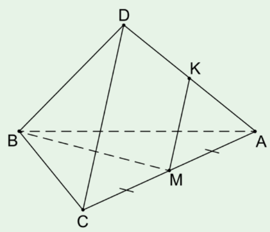
ა) პარალელოგრამი; ბ) ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 7 სმ და 14 სმ;

გ) ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 10 სმ. და 15 სმ;

დ) რომბი.

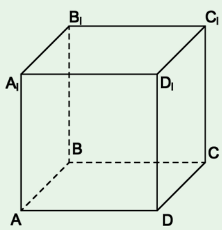
6 მოცემულია პირამიდა. B წვეროზე, DA წიბოსა და AC წიბოს შუაწერტილებზე გადის (BMK) სიბრტყე. რომელი არაა მართებული?

ა) $MK \parallel CD$; ბ) $MK \parallel BC$; გ) $MK \parallel (BCD)$; დ) $CD \parallel (BMK)$.



7 DABC პირამიდის AD წიბოს M შუაწერტილზე გავლებულია ABC ფუძის პარალელური α სიბრტყე. გამოთვალე კვეთაში მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ ΔABC-ს პერიმეტრია 40 სმ.

8 მოცემულია კუბი. B_1C_1 და C_1D_1 წიბოებზე აღებულია M და N შუაწერტილები. BD-სა და MN-ზე გავლებულია სიბრტყე. განსაზღვრე მიღებული BMND ოთხკუთხედის სახე და იპოვე მისი პერიმეტრი, თუ $AB=7\sqrt{2}$.



4.6 წრფისა და სიბრტყის მართობულობა, სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. სამი მართობის თეორემა

მიზანი

წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევების განხილვა; სამი მართობის თეორემის დამტკიცება და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება

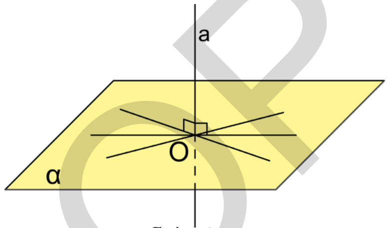
a წრფეს ეწოდება α სიბრტყის მართობული, თუ a წრფე მართობულია α სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის (ნახ.1).

აღინიშნება ასე: $a \perp \alpha$

თეორემა 1. (წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი) თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფიდან თითოეულის მართობულია, მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია.

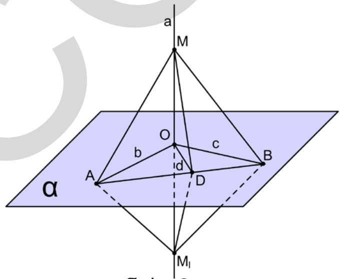
მოცემულია: $a \perp b$, $a \perp c$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $b \cap c = 0$.

უ.დ. $a \perp \alpha$.



ნახ. 1

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ α სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი d წრფე a წრფის მართობულია. ამასთან, ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ, რომ a და d წრფეები b და c წრფეების გადაკვეთის O წერტილზეა გავლებული (ნახ. 2).



ნახ. 2

გავავლოთ რაიმე წრფე, რომელიც გადაკვეთს b, d, და c წრფეებს შესაბამისად A, D, და B წერტილებში. ავიღოთ M წერტილი a წრფეზე და OM სხივის დამატებით სხივზე გადავდოთ $OM_1=OM$ მონაკვეთი. შევაერთოთ M და M_1 წერტილები A, B და D წერტილებთან.

OA არის MM_1-ის შუამართობი, ამიტომ $AM_1=AM$. ანალოგიურად $MB=M_1B$ $\Delta MAB=\Delta M_1AB$ (სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით). აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle MAB=\angle M_1AB$,

განვიხილოთ ΔMAD და ΔM_1AD. $\angle MAD=\angle M_1AD$, AD საერთოა, $MA=M_1A$. სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, $\Delta MAD=\Delta M_1AD \Rightarrow MD=M_1D$. ΔM_1MD აღმოჩნდა ტოლფერდა, სადაც DO მედიანაა. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისების თანახმად, მედიანა სიმაღლეცაა, ე.ი. $MM_1 \perp OD$ წრფის. მივიღეთ, რომ M_1O წრფე OD (იგივე d) წრფის მართობულია. თეორემა დამტკიცებულია.

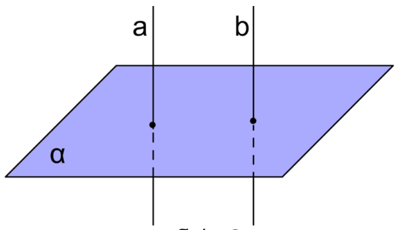
ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს (დაამტკიცე დამოუკიდებლად):

თვისება 1. სიბრტყისადმი გავლებული მართობული წრფეები პარალელურია (ნახ. 3).

$a \perp \alpha$ და $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$.

ანალოგიური თვისება გვაქვს პლანიმეტრიაში:

წრფისადმი გავლებული მართობული წრფეები პარალელურია.



ნახ. 3

თვისება 2. თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი სიბრტყის მართობულია, მაშინ მეორეც ამავე სიბრტყის მართობული იქნება.

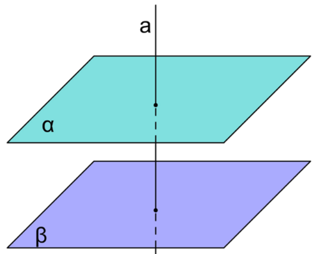
$a \parallel b$ და $a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$.

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან და ჩაწერე მათემატიკური სიმბოლოების საშუალებით.

თვისება 3.

ერთი და იმავე წრფის მართობული სიბრტყეები პარალელურია (ნახ. 4).

$\alpha \perp a,\ \beta \perp a \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.



ნახ. 4

თვისება 4.

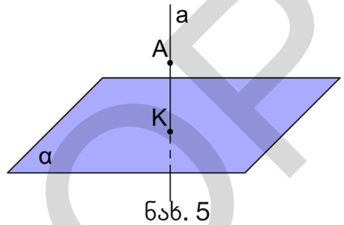
თუ ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთი მართობულია a წრფის, მაშინ მეორეც მართობული იქნება ამავე წრფისა (ნახ. 4).

$\alpha \parallel \beta$ და $\alpha \perp a \Rightarrow \beta \perp a$.

თვისება 5.

სიბრტყის გარეთ აღებულ წერტილზე გაივლება ამ სიბრტყისადმი მართობული ერთადერთი წრფე (ნახ. 5).

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან.

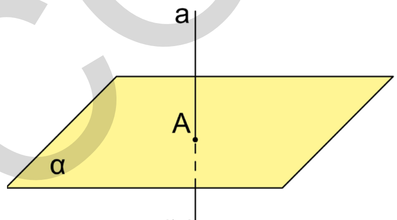


ნახ. 5

თვისება 6.

სიბრტყეზე მდებარე წერტილზე გაივლება სირტყისადმი ერთადერთი მართობული წრფე (ნახ. 6).

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან და ააგე შესაბამისი ნახაზი.

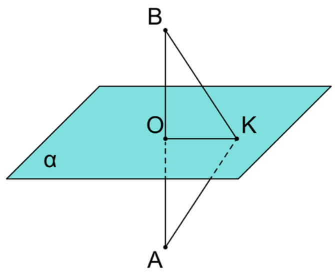


ნახ. 6

თვისება 7.

AB მონაკვეთის შუაწერტილზე AB მონაკვეთის მართობულად გავლებული α სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან (ნახ. 7).

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ K \in \alpha \\ AO = OB \end{array}\right\} \Rightarrow BK = AK$$



ნახ. 7

გაიხსენე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან და ააგეთ შესაბამისი ნახაზი.

თვისება 8. (მე-7 გამონათქვამის შებრუნებული).

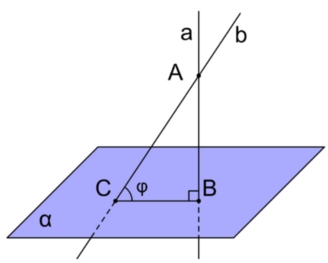
მონაკვეთის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილები მდებარეობს ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალ, ამავე მონაკვეთის მართობულ სიბრტყეზე.

ჩამოაყალიბე ანალოგიური თვისება პლანიმეტრიიდან.

ავიღოთ α სიბრტყე და მის გარეთ მდებარე A წერტილი (ნახ. 8). A წერტილზე გავავლოთ α სიბრტყისადმი მართობული a წრფე. სიბრტყესთან მისი გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ B-თი. A წერტილზე გავავლოთ b წრფე რომელიც α სიბრტყეს გადაკვეთს B-სგან განსხვავებულ რაიმე C წერტილში.

ორთოგონალური დაგეგმილებით A წერტილის გეგმილია B წერტილი, ხოლო b წრფის გეგმილი BC წრფე. როგორც ვიცით, a-ს ეწოდება სიბრტყისადმი მართობული წრფე, b-ს კი სიბრტყისადმი დახრილი წრფე. შემოვიტანოთ შემდეგი ტერმინები:

1. AB მონაკვეთი – **მართობი**;
2. B წერტილი – **მართობის ფუძე;**



ნახ. 8

3. AC მონაკვეთი – **დახრილი**;

4. C წერტილი – **დახრილის ფუძე;**

5. CB წრფე – დახრილი b წრფის **გეგმილი** ;

6. CB მონაკვეთი – AC **დახრილის გეგმილი**;

7. AB მართობის სიგრძე – A წერტილიდან α სიბრტყემდე **მანძილი**;

8. დახრილსა და მის გეგმილს შორის კუთხე – **დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე.** ($\angle ACB=\varphi$, $0<\varphi<90°$)

თუ $a\subset\alpha$ ან $a\parallel\alpha$, მაშინ a წრფესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე 0°-ად არის მიღებული, ხოლო თუ $a\perp\alpha$, მაშინ 90°-ად.

კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის აღინიშნება $\angle(a, \alpha)$ სიმბოლოთი.

თუ $A\in\alpha$, მაშინ მანძილი წერტილსა და სიბრტყეს შორის მიღებულია 0-ის ტოლად.

მე-9 ნახაზზე AC და AD დახრილებია.

AB მართობი.

BC და BD გეგმილები.

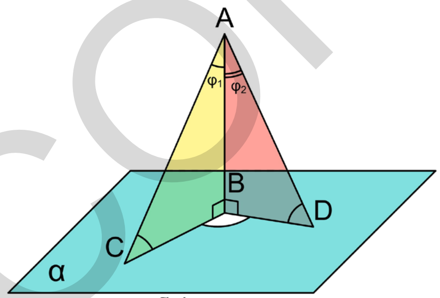
დახრილის ფუძეებს შორის მანძილი – CD მონაკვეთის სიგრძის ტოლია.

1. $\angle BAC$ – დახრილსა და მართობს შორის კუთხეა;

2. $\angle ACB$ – AC დახრილსა და α სიბრტყეს შორის კუთხეა;

3. $\angle CAD$ – დახრილებს შორის კუთხეა;

4. $\angle CBD$ – გეგმილებს შორის კუთხეა.



ნახ. 9

ვთქვათ, გვაქვს ერთი წერტილიდან გავლებული ორი დახრილი და მართობი. შეეცადე დაასაბუთო შემდეგი თვისებები:

1. მართობის სიგრძე ნაკლებია დახრილის სიგრძეზე.

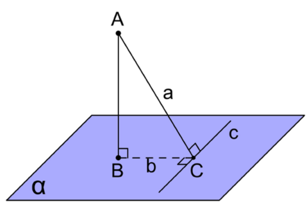
2. თუ დახრილები ტოლია, მაშინ გეგმილები ტოლია და, პირიქით, თუ გეგმილები ტოლია, მაშინ დახრილები ტოლია.

3. ორი დახრილიდან ისაა მეტი, რომლის გეგმილიც მეტია და, პირიქით, ორი გეგმილიდან ისაა მეტი, რომლის დახრილიც მეტია.

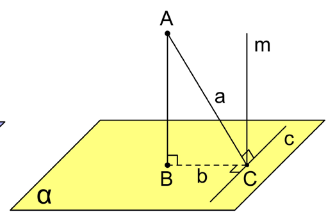
განვიხილოთ α სიბრტყე. $A\notin\alpha$. გავავლოთ AC დახრილი და AB მართობი. (ნახ. 10)

სამი მართობის თეორემა. თუ დახრილი სიბრტყეში მდებარე წრფის მართობულია, მაშინ ამ დახრილის გეგმილიც იმავე წრფის მართობული იქნება;

პირიქით, თუ გეგმილი სიბრტყეში მდებარე წრფის მართობულია, მაშინ დახრილიც იმავე წრფის მართობული იქნება. $a\perp c\Leftrightarrow b\perp c$



ნახ. 10



ნახ. 11

დამტკიცება: გავავლოთ C წერტილზე AB-ს პარალელური m წრფე. m-ზე და AB-ზე გავავლოთ β სიბრტყე. რადგან $m\parallel AB$, მათზე სიბრტყე გაივლება (ნახ. 11) $AB\perp\alpha$, $m\parallel AB$; $\Rightarrow m\perp\alpha\Rightarrow m\perp c$. მივიღეთ $c\perp m$; $c\perp a\Rightarrow c\perp\beta\Rightarrow c\perp b$. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ნაწილი: $b\perp c\Rightarrow a\perp c$. (დაამტკიცე დამოუკიდებლად.)

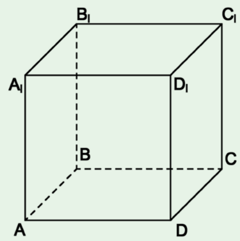
უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება სიბრტყის მართობული წრფე?
2. რაში მდგომარეობს წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი?
3. რას ეწოდება მართობი? მართობის ფუძე?
4. რას ეწოდება დახრილი? დახრილის ფუძე?
5. რას ეწოდება დახრილის გეგმილი?
6. რას ეწოდება დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე?
7. შეიძლება თუ არა, რომ დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე იყოს ბლაგვი?
8. რაში მდგომარეობს სამი მართობის თეორემა?
9. როგორ ფიქრობ, რატომ ჰქვია ამ თეორემას სამი მართობის თეორემა?
10. თუ ერთი წერტილიდან გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, მაშინ ტოლი იქნება თუ არა მათი გეგმილები?

სავარჯიშოები

1 მოცემულია კუბი (იხ. ნახ. 12). დაამტკიცე:
ა) CC_1 წიბო მართობულია ABCD წახნაგის; ბ) $CC_1 \perp AC$.

2 კუბის რამდენი წიბოა მართობული (DCC_1) სიბრტყის? (იხ. ნახ.12)



ნახ. 12

3 რომელი ჩანაწერია მართებული? (იხ. ნახ. 12)
ა) $DC_1 \perp CC_1$; ბ) $C_1D_1 \perp (AA_1D_1)$; გ) $A_1D \perp (ABC)$; დ) $B_1D \perp (ABC)$.

4 ერთი წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებული AB და AC დახრილები ტოლია. AD მართობია. რა შეიძლება ითქვას გეგმილების შესახებ?

5 სიბრტყისადმი A და C წერტილებიდან გავლებულია AB და CD ტოლი დახრილი. AA_1 და CC_1 მართობებია. რა შეიძლება ითქვას A_1B და C_1D გეგმილების შესახებ?

6 AB დახრილი სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვე მისი გეგმილის დახრილთან შეფარდება.

7 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია AB და AC დახრილები და AD მართობი. AB=AC=10სმ, AD=8სმ. იპოვე DC და BD გეგმილების სიგრძე.

8 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია AB და AC დახრილები და AD მართობი. AB=10სმ, AC=12სმ, AD=8სმ. იპოვე DC და BD გეგმილების სიგრძე.

9 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია AB და AC დახრილები და AD მართობი. AB=13სმ, AC=10სმ, $\angle ACD=30°$. იპოვე BD-ს სიგრძე.

10 სიბრტყიდან 12 სმ-ის ტოლი მანძილით დაშორებული A წერტილიდან გავლებულია AB=13 სმ-ის ტოლი დახრილი. იპოვე იმ კუთხის კოსინუსი, რომელსაც ეს დახრილი ადგენს სიბრტყესთან.

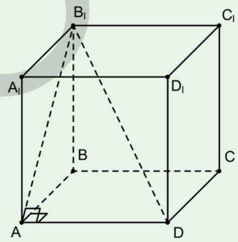
11 AB მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 6 სმ-ითა და 8 სმ-ით. რა მანძილითაა დაშორებული სიბრტყიდან მისი შუაწერტილი? (განიხილე ორი შემთხვევა.)

12 A წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია AB და AC დახრილი. AB=10 სმ. AC=8 სმ. შეიძლება თუ არა AB დახრილის გეგმილი იყოს 6 სმ-ის ტოლი? (პასუხი დაასაბუთე.)

13 მოცემულია კუბი. გავლებულია წახნაგის AB_1 და კუბის B_1D დიაგონალი. მიღებულ ΔAB_1D-ს შესახებ მსჯელობენ ნინო და ნანა.

ნინო: AB_1-ის გეგმილია AB. რადგან $AB \perp AD$, ამიტომ B_1A დახრილიც მართობული იქნება AD-სი. ე.ი. ΔAB_1D მართკუთხაა.

ნანა: $DA \perp AB$, $DA \perp AA_1 \Rightarrow DA \perp (AA_1B_1)$. ამიტომ, DA მართობულია სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის, მათ შორის – AB_1 წრფის. ე.ი. ΔAB_1D მართკუთხაა.



რომელი მსჯელობს სწორად?

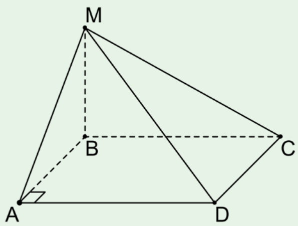
14 მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი, რომლის წიბოს სიგრძეა a.

ა) დაადგინე BB_1D_1D ოთხკუთხედის სახე. გამოთვალე მისი ფართობი;

ბ) გამოთვალე A_1C დიაგონალის სიგრძე;

გ) იპოვე DC_1 დიაგონალის $(A_1B_1C_1)$ წახნაგთან შედგენილი კუთხის კოსინუსი.

15 B წერტილიდან ABCD კვადრატის სიბრტყისადმი გავლებულია BM მართობი და MA, MC და MD დახრილები. დაასახელე M წვეროს მქონე მართკუთხა სამკუთხედები.

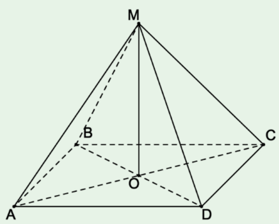


16 ABCD კვადრატის B წვეროდან აღმართულია კვადრატის სიბრტყისადმი B მართობი, რომლის სიგრძეა 8 სმ. იპოვე მანძილები M წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა 6 სმ.

17 ABCD კვადრატის O ცენტრიდან აღმართულია კვადრატის სიბრტყისადმი OM=12 სმ სიგრძის მართობი. კვადრატის გვერდი 8-ის ტოლია. იპოვე:

ა) M წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე მანძილი;

ბ) M წერტილიდან კვადრატის გვერდამდე მანძილი.

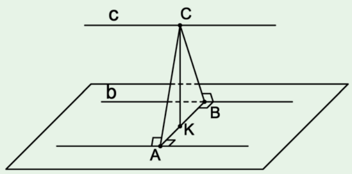


18 დაამტკიცე, რომ თუ წერტილი ტოლადაა დაშორებული მრავალკუთხედის წვეროებიდან, მაშინ ამ წერტილის ორთოგონალური გეგმილი მრავალკუთხედის სიბრტყეში ამ მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს.
ააგე ნახაზი კერძო შემთხვევებში, როცა მრავალკუთხედი:
ა) მართკუთხა სამკუთხედია;
ბ) წესიერი სამკუთხედია;
გ) ტოლფერდა სამკუთხედია;
დ) კვადრატია;
ე) წესიერი ექვსკუთხედია.

19 დაამტკიცე, რომ თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მრავალკუთხედის გვერდებიდან, მაშინ ამ წერტილის ორთოგინალური გეგმილი ამ მრავალკუთხედის სიბრტყეზე მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს.
ააგე ნახაზი კერძო შემთხვევებში, როცა მრავალკუთხედი:
ა) მართკუთხა სამკუთხედია;
ბ) წესიერი სამკუთხედია;
გ) ტოლფერდა სამკუთხედია;
დ) კვადრატია;
ე) წესიერი ექვსკუთხედია.

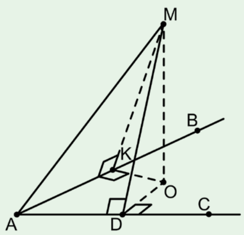
20 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია 10 სმ-ის სიგრძის ორი დახრილი, რომლებიც ერთმანეთთან α კუთხეს ადგენს. იპოვე დახრილების ფუძეებს შორის მანძილი. ყველაზე დიდი რა მანძილით შეიძლება იყოს დაშორებული A წერტილი სიბრტყიდან?

21 მოცემულია სამი ურთიერთპარალელური a, b და c წრფე. მანძილი a და c წრფეს შორის ტოლია 10სმ-ის, a და b წრფეს შორის 16სმ-ის, b და c წრფეს შორის ტოლია 12სმ-ის. იპოვე მანძილი c წრფიდან a და b წრფეებზე გამავალ სიბრტყემდე.



22 BAC კუთხის A წვეროზე გავლებულია AM სხივი, რომელიც კუთხის გვერდებთან ტოლ კუთხეებს ადგენს. დაამტკიცე, რომ M წერტილი დაგეგმილდება BAC კუთხის ბისექტრისაზე.

მითითება: გაავლე MK⊥AB და MD⊥AC. დაამტკიცე AMK და AMD სამკუთხედების ტოლობა.



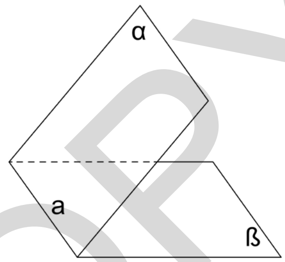
აბა, სცადე!

ABCD ოთხკუთხედის სიბრტყის გარეთ აღებული წერტილიდან ოთხკუთხედის წვეროებამდე მანძილები ტოლია. იპოვე ამ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი.

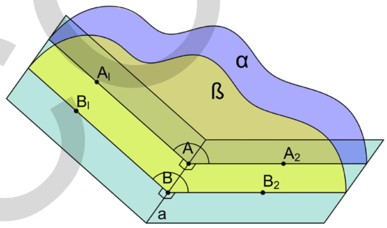
4.7 ორწახნაგა კუთხე, კუთხე სიბრტყეებს შორის

მიზანი

ორწახნაგა კუთხის განმარტება და გაზომვა



სიბრტყეზე ავიღოთ რაიმე a წრფე. ეს წრფე სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს, **ნახევარსიბრტყე** ეწოდება. საერთო წრფის მქონე ორი ნახევარსიბრტყე სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად. თითოეულს, ამ ნახევარსიბრტყეებთან ერთად, **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება. ნახევარსიბრტყეებს ორწახნაგა კუთხის **წახნაგები**, ხოლო საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის **წიბო** ეწოდება. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ამოზნექილ ორწახნაგა კუთხეებს. ორწახნაგა კუთხის მოდელს წარმოადგენს სრულად ან ნაწილობრივ გადაშლილი წიგნი.

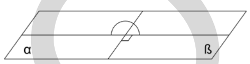


როგორ შევადაროთ ერთმანეთს ორწახნაგა კუთხეები და რა მივიღოთ მის სიდიდედ?

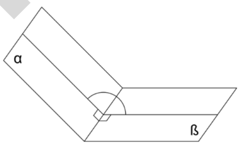
განვიხილოთ ორწახნაგა კუთხე და მის წიბოზე ავიღოთ A წერტილი. მასზე გავატაროთ a წრფის მართობული α სიბრტყე. ეს სიბრტყე წახნაგებიდან მოკვეთს AA_1 და AA_2 სხივებს. A_1AA_2 ბრტყელ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის **ხაზოვანი კუთხე** ეწოდება.

ხაზოვანი კუთხის სიდიდე არაა დამოკიდებული წიბოს წერტილის არჩევაზე. მართლაც, თუ ავიღებთ წიბოზე B წერტილს და ანალოგიურად გავავლებთ მასზე წიბოს მართობულ β სიბრტყეს, ის წახნაგებზე მოკვეთს BB_1 და BB_2 სხივებს. $\alpha\perp a$ და $\beta\perp a\Rightarrow\alpha\parallel\beta$, შესაბამისად $BB_1\parallel AA_1$ და $BB_2\parallel AA_2$ (ახსენი, რატომ). მივიღებთ $\angle B_1BB_2=\angle A_1AA_2$. ამიტომ ორწახნაგა კუთხის სიდიდედ შეგვიძლია მივიჩნიოთ მისი ხაზოვანი კუთხის სიდიდე.

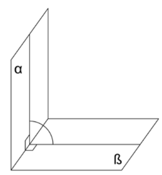
ე.ი. ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე ორწახნაგა კუთხისა და მისი წიბოს მართობული სიბრტყის თანაკვეთაა, ხოლო ხაზოვანი კუთხის სიდიდე – ორწახნაგა კუთხის სიდიდეა. მაგალითად, თუ ხაზოვანი კუთხე უდრის 120°-ს, მაშინ ამბობენ, რომ ორწახნაგა კუთხეც 120°-ის ტოლია. სტერეომეტრიაში, ისევე, როგორც პლანიმეტრიაში, გვექნება ორწახნაგა კუთხის სახეები:



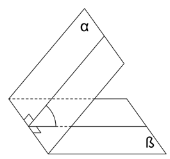
გაშლილი კუთხე
$\varphi=180°$



ბლაგვი კუთხე
$90°<\varphi<180°$



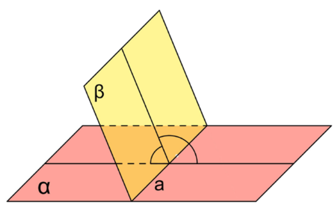
მართი კუთხე
$\varphi=90°$



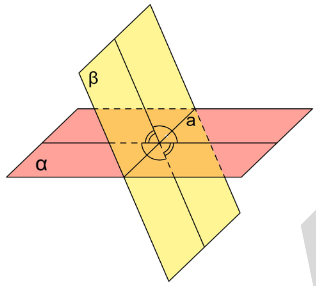
მახვილი კუთხე
$0°<\varphi<90°$

განვმარტოთ მოსაზღვრე და ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები.

ორ ორწახნაგა კუთხეს ეწოდება **მოსაზღვრე**, თუ ერთი წახნაგი საერთო აქვთ, დანარჩენი ორი კი ერთმანეთის დამატებითი ნახევარსიბრტყეებია. მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.



ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები ეწოდება ისეთ კუთხეებს, რომელთა წახნაგები ერთმანეთის დამატებითი ნახევარსიბრტყეებია. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია. ორი გადამკვეთი სიბრტყე გვაძლევს ოთხ ორწახნაგა კუთხეს. გვექნება ვერტიკალური კუთხეების ორი წყვილი. თუ ერთ-ერთი ორწახნაგა კუთხე 90°-ის ტოლია, მაშინ დანარჩენი სამი კუთხიდან თითოეული 90°-ის ტოლი იქნება. ასეთ სიბრტყეებს **მართობული სიბრტყეები** ეწოდება.

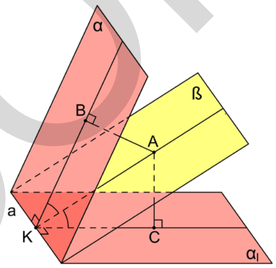


გადამკვეთ სიბრტყეებს შორის კუთხე ეწოდება მათი გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან უმცირესს. კუთხე α და β სიბრტყეებს შორის აღინიშნება ასე: $\angle(\alpha;\beta)$.

თუ სიბრტყეები პარალელურია ან ემთხვევა ერთმანეთს , მათ შორის კუთხე 0°-ად არის მიჩნეული. ასე რომ სიბრტყეებს შორის კუთხის სიდიდე [0°; 90°] შუალედშია მოთავსებული.

ორწახნაგა კუთხის შუაზე გამყოფ ნახევარსიბრტყეს **ბისექტორი** ეწოდება. (გაიხსენე პლანიმეტრიიდან: კუთხის ბისექტრისა და მისი თვისება.)

ბისექტორის თვისება: ბისექტორის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან.



ჩამოაყალიბე მოცემულის შებრუნებული თეორემა და დაამტკიცე ეს თეორემები დამოუკიდებლად.

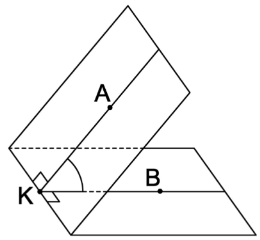
მართობული სიბრტყეების მოდელებია: ოთახში ჭერი და კედელი, იატაკი და კედელი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორწახნაგა კუთხე, რომლის წიბოა a წრფე. ავაგოთ მისი ხაზოვანი კუთხე.

ხერხი 1. ავიღოთ წიბოზე K წერტილი. გავავლოთ ერთ წახნაგზე $KA\perp a$. მეორე წახნაგზე $KB\perp a$.

$a\perp KA$ და $a\perp KB \Rightarrow a\perp(KAB)$, ამიტომ, განმარტების თანახმად, $\angle AKB$ ხაზოვანი კუთხეა.

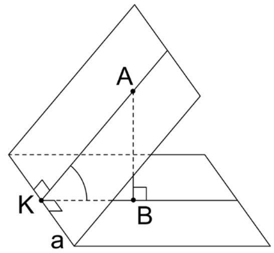
ხერხი 2. ავიღოთ ერთ-ერთ წახნაგზე A წერტილი (ნახ. 1). გავავლოთ a წიბოსადმი AK მართობი, K წერტილიდან მეორე სიბრტყეში გავავლოთ a წრფისადმი KB მართობი. განმარტების თანახმად, $\angle AKB$ ხაზოვანი კუთხეა.



ნახ. 1

ხერხი 3.

ავიღოთ A წერტილი ერთ-ერთ წახნაგზე (ნახ. 2). გავავლოთ მასზე წიბოსადმი AK მართობი და მეორე წახნაგისადმი AB მართობი. AK მართობია a წიბოსადმი, იმავდროულად AK დახრილია მეორე წახნაგისადმი. KB არის AK-ს გეგმილი. სამი მართობის თეორემის თანახმად, KB-ც იქნება წიბოს მართობული. $KA\perp a$ და $KB\perp a \Rightarrow a\perp(AKB)$. ე.ი. $\angle AKB$ ხაზოვანი კუთხეა.



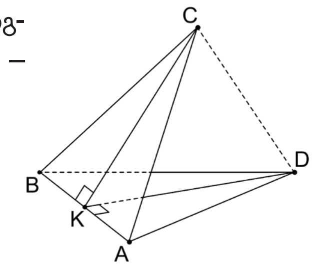
ნახ. 2

ამოცანა 1. საერთო ფუძის მქონე ორი ტოლფერდა სამკუთხედი ერთმანეთთან 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს ადგენს. საერთო ფუძის სიგრძეა c სმ. ერთი სამკუთხედის ფერდი a სმ-ია, მეორე სამკუთხედის – b სმ. ვიპოვოთ მანძილი სამკუთხედების წვეროებს შორის (ნახ. 3).

მოც: $(\Delta ABC)\cap(\Delta ABD)=AB$; $AB=c$;

$BC=AC=a$; $BD=AD=b$; $\angle((ABC);(ABD))=60°$.

$CD=?$



ნახ. 3

ამოხსნა. ამოცანა ამოვხსნათ 3 საფეხურად:

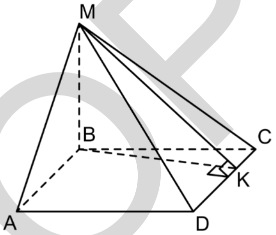
1. ხაზოვანი კუთხის აგება.

AB ფუძეზე ავიღოთ მისი შუაწერტილი K. შევაერთოთ C და D წვეროები K-სთან. ΔABC ტოლფერდაა, CK-მედიანაა. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისების თანახმად იგი სიმაღლეცაა, ე.ი. $AB \perp CK$. ანალოგიურად, $AB \perp DK \Rightarrow AB \perp (CDK)$. ე.ი. CKD ხაზოვანი კუთხეა. პირობის თანახმად, $\angle CKD=60°$.

2. CK-ს და DK-ს გამოთვლა. ΔBCK მართკუთხაა. $CK=\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}$, ანალოგიურად გამოითვლება DK.

3. ΔCKD-ში ვიცით CK, DK და მათ შორის კუთხე. კოსინუსების თეორემით შეგვიძლია გამოვითვალოთ CD. (დაასრულე ამოხსნა.)

ამოცანა 2.



ABCD პარალელოგრამის B წვეროდან პარალელოგრამის სიბრტყისადმი აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია პარალელოგრამის წვეროებთან. ავაგოთ ხაზოვანი კუთხეები მიღებულ სამკუთხედებსა და პარალელოგრამის სიბრტყეს შორის.

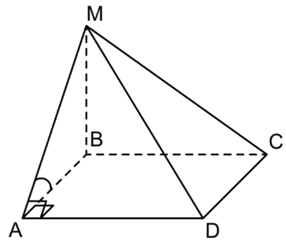
ამოხსნა. (MCD)-სა და პარალელოგრამის სიბრტყის გადაკვეთის წრფეა CD. B-დან გავავლოთ $BK \perp CD$ (პარალელოგრამის სიმაღლე). შევაერთოთ M და K წერტილები. სამი მართობის თეორემის თანახმად: $BK \perp CD \Rightarrow MK \perp CD$.

$$\left.\begin{matrix} MK \perp CD \\ BK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (MBK)$$ ე.ი. $\angle BKM$ არის ხაზოვანი კუთხე

ანალოგიურად ავაგებთ (AMD) და პარალელოგრამის სიბრტყეს შორის ხაზოვან კუთხეს.

ავაგოთ (AB) წიბოსთან ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე. $(ABM) \cap (ABCD)=AB$. $\{AB \perp BM,\ AB \perp BK \Rightarrow AB \perp (MBK)\}$. ე.ი. $\angle MBK$ არის ხაზოვანი კუთხე. ეს კუთხე 90°-ის ტოლი იქნება, რადგან $MB \perp BK$. ანალოგიურად აიგება (MBC) და (ABC) სიბრტყეებს შორის ხაზოვანი კუთხე.

ამოცანა 3.



ABCD მართკუთხედის B წვეროდან აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია მართკუთხედის წვეროებთან. AD გვერდთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხე ტოლია 30°-ის. AB=10 სმ, BC=15სმ. ვიპოვოთ: ა) AM; ბ) ΔAMD-ს ფართობი.

ამოხსნა. AB წარმოადგენს AM-ის გეგმილს. $AB \perp AD$ (პირობიდან გამომდინარე) სამი მართობის თეორემის თანახმად, $AM \perp AD$ ე.ი. $\angle MAD=90°$. ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე კი იქნება თვითონ $\angle MAB=30°$.

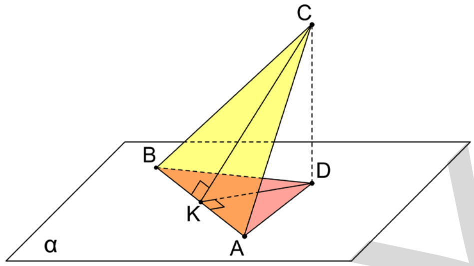
1) ΔABM მართკუთხაა, $\angle A=30° \Rightarrow AM=\frac{20}{\sqrt{3}}$.

2) $S_{AMD}=\frac{20 \cdot 15}{2\sqrt{3}}=50 \cdot \sqrt{3}$ (სმ²).

ამოცანა 4.

ვთქვათ, α სიბრტყე გადის ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. სამკუთხედი ABC დავაგეგმილოთ α სიბრტყეზე. A და B წვეროები დაგეგმილდებიან თავის თავში, C – რაიმე D წერტილში. ΔABC-ს გეგმილი იქნება სამკუთხედი ABD. ვიპოვოთ გეგმილის S_1 ფართობი, თუ მოცემულია ΔABC-ს ფართობი S და სიბრტყეებს შორის φ კუთხე.

ამოხსნა. ავაგოთ ხაზოვანი კუთხე სამკუთხედების სიბრტყეებს შორის. გავავლოთ CK⊥AB. სამი მართობის თეორემის თანახმად, DK⊥AB. ∠CKD იქნება ხაზოვანი კუთხე და ტოლია φ.



$$S_1=\frac{1}{2}\ AB \cdot DK=\frac{1}{2}\,AB \cdot CK \cdot \cos\varphi=S \cdot \cos\varphi.$$

მიღებული ფორმულა მართებულია ზოგად შემთხვევაში: თუ ბრტყელი ფიგურის ფართობია S და ამ ფიგურის სიბრტყესა და α სიბრტყეს შორის კუთხე არის φ, მაშინ ფიგურის α სიბრტყეზე გეგმილის S_1 ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_1=S \cdot \cos\varphi.$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე, ორწახნაგა კუთხის წიბო, წახნაგი?
2. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
3. რას ეწოდება გაშლილი, ბლაგვი, მართი და მახვილი ორწახნაგა კუთხე?
4. რას ეწოდება მოსაზღვრე და ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები?
5. რას უდრის მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხეების ჯამი?
6. რამდენი გრადუსი შეიძლება იყოს ორწახნაგა კუთხის სიდიდე?
7. რას ეწოდება სიბრტყეებს შორის კუთხე?
8. რა შემთხვევაშია სიბრტყეები ურთიერთმართობული?
9. დაასახელე ორწახნაგა კუთხის მაგალითები შენ ირგვლივ გარემოში.

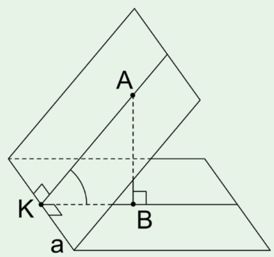
სავარჯიშოები

1 მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხეებიდან ერთ-ერთი მეორეზე სამჯერ მეტია. იპოვე მათ შორის უმცირესის სიდიდე.

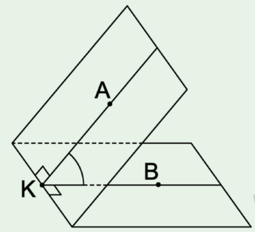
2 ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეებიდან ერთ-ერთი 50°-ის ტოლია. რას უდრის დანარჩენი კუთხეებიდან უდიდესი?

3 ბისექტორზე მდებარე წერტილი ერთ-ერთი წახნაგიდან 10 სმ-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. რა მანძილითაა დაშორებული ეს წერტილი მეორე წახნაგიდან?

4 ორწახნაგა კუთხის წახნაგის A წერტილიდან წიბოსადმი გავლებულია AK მართობი და მეორე წახნაგისადმი AB მართობი. დაამტკიცე, რომ ∠AKB ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეა და იპოვე ეს კუთხე, თუ AB=KB.



5 60°-იანი ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე მოცემული A და B წერტილებიდან გავლებულია წიბოსადმი AK და BK მართობები. AK=BK=8 სმ. იპოვე AB.

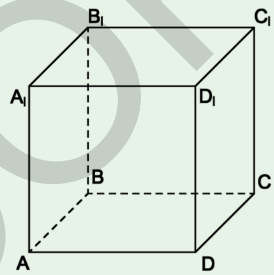


6 ამოხსენი წინა ამოცანა იმ პირობით, რომ AK=10 სმ, BK=8 სმ.

7 ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მდებარე A წერტილი წიბოდან დაშორებულია 10 სმ-ით, მეორე წახნაგიდან კი $5\sqrt{3}$ სმ-ით. იპოვე ორწახნაგა კუთხე.

8 დაამტკიცე, რომ ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე თითოეული წახნაგის მართობულია.

9 მოცემულია კუბი (ნახ. 1). დაამტკიცე, რომ: ა) $(AA_1B_1)\perp(ABC)$; ბ) (ABC) სიბრტყის მართობული კიდევ რამდენი სიბრტყე არსებობს, რომელიც შეიცავს კუბის წახნაგს?



ნახ. 1

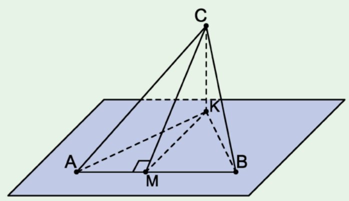
10 მოცემულია კუბი (ნახ. 1). დაამტკიცე, რომ $B_1A\perp AD$. რას უდრის ორწახნაგა კუთხე (AB_1C_1) და (ABC) სიბრტყეებს შორის?

11 მოცემულია მართი პარალელეპიპედი. მისი ABCD ფუძე პარალელოგრამია, რომლის $\angle B=110°$. იპოვე BB_1C_1C წახნაგის სიბრტყესა და DD_1C_1C სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.

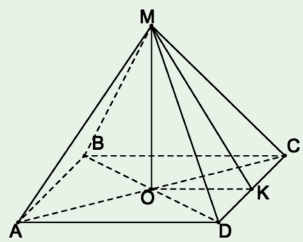
12 α სიბრტყე გადის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე და სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. იპოვე α სიბრტყეზე სამკუთხედის გეგმილის ფართობი, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძეა $8\sqrt{2}$ სმ.

13 სიბრტყე გადის ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის დიდ ფუძეზე და მის სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს. იპოვე ტრაპეციის გეგმილის ფართობი ამ სიბრტყეზე, თუ AB=CD=5 სმ, BC=4 სმ, AD=12 სმ.

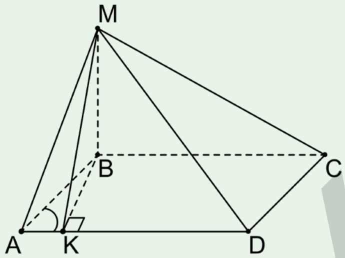
14 ABC სამკუთხედის AB გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან ადგენს 45°-ის ტოლ ორწახნაგა კუთხეს. იპოვე მანძილი C წვეროდან ამ სიბრტყემდე, თუ AB=14 სმ, BC=13 სმ, AC=15 სმ.



15 ABCD კვადრატის სიბრტყის გარეთ აღებული M წერტილი შეერთებულია კვადრატის წვეროებთან. MA=MB=MC=MD. რამდენჯერ მეტია DC წიბოსთან მდებარე ორწახნაგა კუთხის ტანგენსი MA წრფის (ABC) სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის ტანგენსზე?



16 ABCD პარალელოგრამის B წვეროდან მისი სიბრტყისადმი აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია პარალელოგრამის წვეროებთან. ორწახნაგა კუთხე (AMD) და (ABC) სიბრტყეებს შორის $45°$-ია. $AB=4$ სმ, $BC=6$ სმ, $\angle BAD=60°$.
იპოვე: ა) MB; ბ) ΔMCD-ს ფართობი; გ) (MDC) და (ABC) სიბრტყეებს შორის კუთხის კოსინუსი.



ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №9

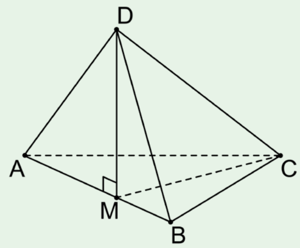
1 წრის O ცენტრიდან მისი სიბრტყისადმი აღმართულია $OM=4$სმ სიგრძის მართობი. რამდენი სანტიმეტრია მანძილი M წერტილიდან წრეწირის წერტილამდე, თუ წრეწირის რადიუსია 3 სმ?
ა) 5 სმ; ბ) 4 სმ; გ) 7 სმ; დ) 6 სმ.

2 სიბრტყიდან 6 სმ-ის ტოლი მანძილით დაშორებული M წერტილიდან გავლებულია MA მართობი და MB დახრილი. იპოვე MB დახრილის სიგრძე, თუ მის მიერ სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის სინუსი $\frac{3}{4}$-ის ტოლია.
ა) 16 სმ; ბ) 8 სმ; გ) 6 სმ; დ) 5 სმ.

3 A და B წერტილები α სიბრტყიდან დაშორებულია 6 სმ და 12 სმ-ის ტოლი მანძილებით. რა მანძილითაა დაშორებული AB მონაკვეთის შუაწერტილი სიბრტყიდან, თუ AB მონაკვეთი არ კვეთს α სიბრტყეს?
ა) 7 სმ; ბ) 8 სმ; გ) 9 სმ; დ) 10 სმ.

4 მართი ორწახნაგა კუთხის ბისექტორზე მდებარე წერტილი წახნაგებიდან დაშორებულია $12\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლი მანძილით. ამ წერტილიდან წიბომდე მანძილია:
ა) 12 სმ; ბ) 6 სმ; გ) 18 სმ; დ) 24 სმ.

5 ორი ტოლგვერდა ABD და ABC სამკუთხედების სიბრტყეები მართობულია. $AB=6$სმ. რას უდრის D და C წვეროებს შორის მანძილი?
ა) 8 სმ; ბ) $3\sqrt{6}$ სმ; გ) $0,5\sqrt{6}$; დ) $\sqrt{6}$.



6 ჩამოთვლილი დებულებებიდან რომლებია მართებული?
ა) თუ სიბრტყისადმი გავლებული დახრილები ტოლია, მაშინ მათი გეგმილები ტოლია; ბ) ერთი და იმავე წრფისადმი გავლებული მართობები პარალელურია; გ) რაიმე სიბრტყისადმი გავლებული ორი მართობული სიბრტყე პარალელურია; დ) ერთი და იმავე წრფისადმი გავლებული მართობული სიბრტყეები ერთმანეთის პარალელურია; ე) სიბრტყის პარალელურ წრფეზე გაივლება ამ სიბრტყისადმი მხოლოდ ერთი მართობული სიბრტყე.

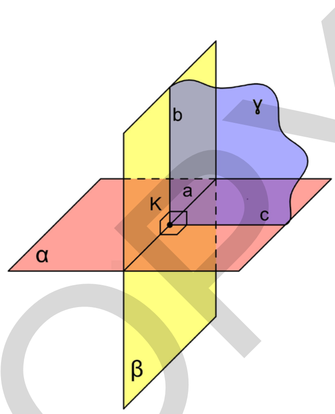
7 იპოვე a წიბოს მქონე კუბის წვეროებს შორის უდიდესი და უმცირესი მანძილი.

8 ABCD კვადრატის B წვეროდან აღმართულია 8 სმ სიგრძის BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია A, D, C წვეროებთან. (MCD) და (ABC) სიბრტყეებს შორის კუთხეა $45°$. იპოვე კვადრატის ფართობი.

4.8 სიბრტყეთა მართობულობა

მიზანი

სიბრტყეთა მართობულობის ნიშნის დადგენა და გამოყენება

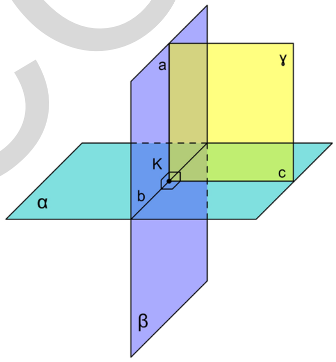


როგორც აღვნიშნეთ, ორ სიბრტყეს მართობული ეწოდება, თუ მათ შორის კუთხე 90 გრადუსია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ორ სიბრტყეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ საერთო წრფის მართობული სიბრტყე მოცემული სიბრტყეებიდან მოკვეთს მართობულ წრფეებს.

$\alpha\cap\beta=a$; $\gamma\cap\alpha=c$; $\gamma\cap\beta=b$ თუ $\angle(b,c)=90°\Rightarrow\angle(\alpha,\beta)=90°$ ანუ $\alpha\perp\beta$;

ურთიერთმართობული სიბრტყეების მაგალითად შეგვიძლია დავასახელოთ: ოთახის იატაკი და კედლები, კუბის მეზობელი წახნაგები და სხვა.

თეორემა 1. (სიბრტყეთა მართობულობის ნიშანი) თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები მართობულია.



მოც: $a\cap\alpha=K$, $a\perp\alpha$, $a\subset\beta$.

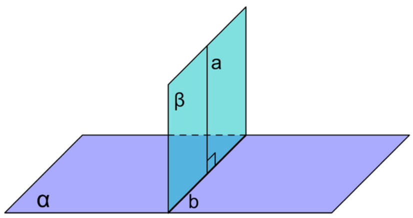
უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\beta\perp\alpha$.

დამტკიცება.

a წრფეზე გავავლოთ β სიბრტყე. იგი α სიბრტყეს გადაკვეთს რაიმე b წრფეზე. დავამტკიცოთ, რომ $\beta\perp\alpha$.

K წერტილზე გავავლოთ b წრფის მართობული c წრფე. $a\perp\alpha$, ამიტომ $a\perp b$; $b\perp a$ და $b\perp c$, ე.ი. b მართობულია a და c წრფეებზე გამავალი სიბრტყისა, ამიტომ, $\angle(\beta,\alpha)=\angle(a,c)=90°$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2: თუ ორი სიბრტყე ურთიერთმართობულია, მაშინ რომელიმე სიბრტყეში გადაკვეთის წრფისადმი გატარებული მართობი მეორე სიბრტყის მართობულია.

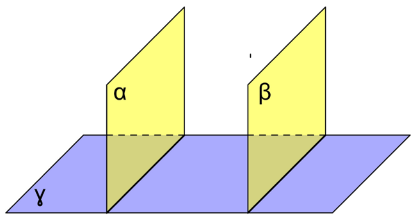


დამტკიცება. მტკიცდება წინა თეორემის ანალოგიურად. (სცადე დამოუკიდებლად დამტკიცება.)

$\alpha\cap\beta=b$, $\alpha\perp\beta$, $a\subset\beta$, $a\perp b\Rightarrow a\perp\alpha$.

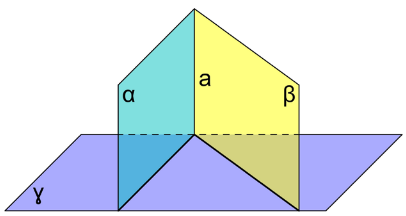
თეორემა 3. (დამტკიცების გარეშე) თუ ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთი მესამე სიბრტყის მართობულია, მაშინ მეორეც მესამის მართობული იქნება.

$\alpha\parallel\beta$ და $\alpha\perp\gamma\Rightarrow\beta\perp\gamma$.



თეორემა 4. (დამტკიცების გარეშე) ერთი და იმავე α სიბრტყის მართობული ორი სიბრტყე პარალელურია ან იკვეთება α სიბრტყის მართობულ წრფეზე.

$\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma\Rightarrow\alpha\parallel\beta$ ან $(\alpha\cap\beta)=a$, $a\perp\gamma$.

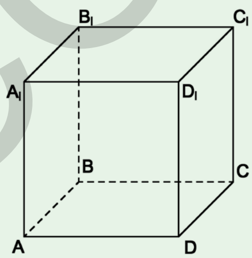


უპასუხე კითხვებს:

1. როდის ვიტყვით, რომ ორი სიბრტყე მართობულია?
2. მოცემულია: $\alpha \perp \beta$ და $\alpha \cap \beta = a$. α სიბრტყეში გატარებული a წრფისადმი მართობული წრფე იქნება თუ არა β სიბრტყის მართობული?
3. რამდენგრადუსიანია მართობულ წახნაგებს შორის ორწახნაგა კუთხეები?
4. მართებულია თუ არა, რომ ერთი და იმავე სიბრტყის მართობული სიბრტყეები პარალელურია?

სავარჯიშოები

1-7 ამოცანებში ისარგებლე მოცემული ნახაზით.



1 კუბის წახნაგების შემცველი სიბრტყეებიდან რამდენია (ABC) სიბრტყის მართობული?

2 კუბის წახნაგების შემცველი სიბრტყეებიდან რამდენია (AA_1B) სიბრტყის პარალელური?

3 რა სახისაა (AA_1B_1) და (BB_1C_1) სიბრტყეებს შორის კუთხე?

4 ქვემოთ მოცემულთაგან რომელი არ არის მართებული დებულება?

ა) $(BB_1D_1) \perp (ABC)$; ბ) $(BB_1D_1) \perp (CDD_1)$

გ) $(AA_1C_1) \perp (ABC)$; დ) $(AA_1B_1) \parallel (DD_1C_1)$

5 ქვემოთ მოცემული ჩანაწერებიდან რომლებია მართებული?

ა) $(DD_1) \perp (ABC)$; ბ) $(BB_1D_1) \perp (DD_1C_1)$;

გ) $(AB) \perp (BC)$; დ) $(AB) \perp (BD)$;

ე) $(AB) \perp (BB_1D_1)$; ვ) $\angle((B_1D); (ABC)) = 45°$;

ზ) $AC \perp BD$; თ) $\angle((AB_1); (CC_1)) = 45°$;

ი) AB_1-ის გეგმილი (ABC)-ზე არის AB;

კ) AB_1-ის გეგმილი (D_1C_1C)-ზე არის DC_1.

6 დაამტკიცე, რომ:

ა) BB_1D_1D მართკუთხედია;

ბ) $\angle((BB_1D_1); (DD_1C_1)) = 45°$;

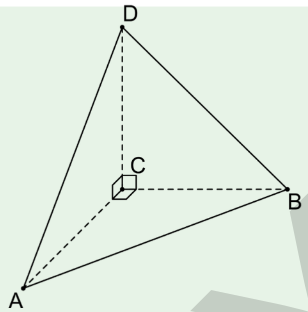
გ) $\angle B_1AD = 90°$.

7 კუბის წიბო a-ს ტოლია. გამოთვალე:

ა) BB_1D_1D მართკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი;

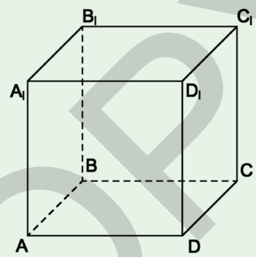
ბ) B_1AD სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.

8 C წერტილიდან გავლებულია CA, CB და CD ურთიერთმართობული მონაკვეთები. იპოვე ორწახნაგა კუთხეები მიღებულ ა) (ACD) და (BCD); ბ) (ACB) და (ADB) სიბრტყეებს შორის, თუ AC=6სმ, BC=8სმ და CD=$4{,}8\sqrt{3}$ სმ.



9 მოცემულია a სმ წიბოს მქონე კუბი. წახნაგის დიაგონალია $6\sqrt{2}$ სმ. გამოთვალე:

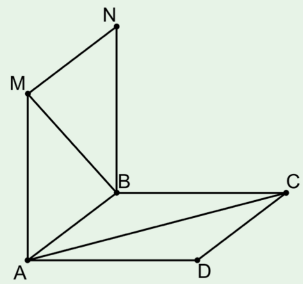
ა) A წვეროდან მანძილი (BB_1D_1) სიბრტყემდე.
ბ) $\angle((B_1A); (B_1BD))$



10 ABCD და ABMN საერთო AB გვერდის მქონე მართკუთხედებია. მათი სიბრტყეები მართობულია.
ა) დაამტკიცე, რომ ΔNAC მართკუთხაა;
ბ) იპოვე N და C წვეროებს შორის მანძილი, თუ:
AD=8სმ; DC=6სმ; AN=5სმ.

11 ΔABC და ΔABD საერთო AB გვერდის მქონე სამკუთხედებია.მათი სიბრტყეები მართობულია. ΔABC-ში $\angle C=90°$, AB=10სმ; AC=BC; ΔABD-ში AD=BD=13სმ; M წერტილი AB-ს შუაწერტილია.
დაამტკიცე:
1. $DM \perp AB$; $CM \perp AB$;
2. $DM \perp (ABC)$;
3. გამოთვალე DC მონაკვეთის სიგრძე.

12 ABCD და AMNB კვადრატების სიბრტყეები ურთიერთმართობულია. იპოვე კუთხე MB და AC დიაგონალებს შორის.



აბა, სცადე!

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. მისი B_1D დიაგონალი წახნაგებთან ადგენს α, β, γ კუთხეებს.
გამოთვალე: ა) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$; ბ) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

4.9 მანძილები სივრცეში

მიზანი

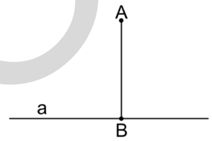
ფიგურებს შორის მანძილის დადგენა სივრცეში

F_1 და F_2 ფიგურას შორის მანძილი ეწოდება მათ უახლოეს წერტილებს შორის მანძილს. თუ ორი წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მათ შორის მანძილი 0-ის ტოლადაა მიღებული. მანძილს აღნიშნავენ $d(F_1;F_2)$ სიმბოლოთი. განვიხილოთ ყველა შემთხვევა, როცა F_1 და F_2 ფიგურები წერტილი, წრფე ან სიბრტყეა და $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

1. $d(A;B)$, ორ წერტილს შორის მანძილი – AB მონაკვეთის სიგრძე (ნახ. 1);

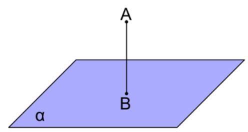
ნახ. 1

2. $d(A;a)$, წერტილიდან წრფემდე მანძილი – A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებული AB მართობის სიგრძე (ნახ. 2).



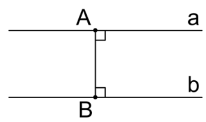
ნახ. 2

3. $d(A;\alpha)$, წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი – A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული AB მართობის სიგრძე (ნახ. 3).



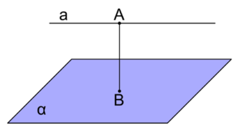
ნახ. 3

4. $d(a;b)$, პარალელურ წრფეებს შორის მანძილი – ერთ-ერთი წრფის რომელიმე წერტილიდან მეორე წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძე (ნახ. 4).



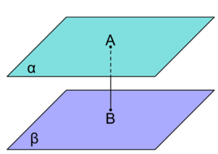
ნახ. 4

5. $d(a;\alpha)$, წრფესა და მის პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი – წრფის რომელიმე წერტილიდან სიბრტყეებზე დაშვებული მართობის სიგრძე (ნახ. 5).



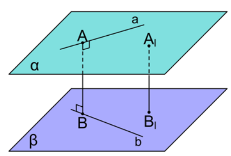
ნახ. 5

6. $d(\alpha;\beta)$, ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილი – ერთ-ერთი სიბრტყის რომელიმე წერტილიდან მეორე სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძე (ნახ. 6).



ნახ. 6

7. $d(a,b)$, $a \dot{-} b$, მანძილი ორ აცდენილ წრფეს შორის – მათი საერთო მართობის სიგრძე. ეს მანძილი იგივეა, რაც ამ წრფეებზე გატარებულ პარალელურ სიბრტყეთა შორის მანძილი, $AB=A_1B_1$ (ნახ. 7).



ნახ. 7

სავარჯიშოები

1 წრფეზე აღებულია A, B და C წერტილები. AC=40 სმ, B წერტილი ძევს A და C წერტილებს შორის. იპოვე AB და BC მონაკვეთის სიგრძეები, თუ მათი შეფარდებაა 0,6.

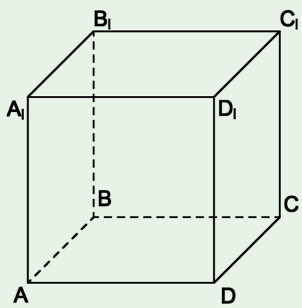
2 ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3 სმ და 4 სმ. იპოვე მანძილი მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზამდე.

3 სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან გავლებულია 20 სმ-ის სიგრძის დახრილი, რომელიც სიბრტყესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს. იპოვე A წერტილიდან ამ სიბრტყემდე მანძილი.

4 პარალელური სიბრტყეებიდან ერთ-ერთზე აღებული წერტილიდან მეორე სიბრტყისადმი გავლებული დახრილის სიგრძეა 13 სმ. მანძილი სიბრტყეებს შორის 12 სმ-ია. იპოვე დახრილის გეგმილის სიგრძე თითოეულ სიბრტყეზე.

5 სიბრტყეზე მდებარე A და B წერტილებიდან მისი პარალელური სიბრტყისადმი გავლებული AC და BD დახრილების გეგმილები ტოლია. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელია მართებული?
ა) AC>BD; ბ) AC<BD; გ) AC=BD.

6 მოცემულია კუბი (ნახ. 1), რომლის წიბოს სიგრძეა 8 სმ. იპოვე მანძილი C_1 წვეროდან:
ა) C წვერომდე; ბ) D წვერომდე;
გ) A წვერომდე; დ) AD წიბომდე;
ე) AB წიბომდე; ვ) CD წიბომდე;
ზ) (ABC) სიბრტყემდე; თ) (BB_1D) სიბრტყემდე.



ნახ. 1

7 მოცემულია კუბი, რომლის წიბოა a სმ.
(იხილე ნახ. 1). იპოვე მანძილი:
ა) AD წრფესა და BC წრფეს შორის;
ბ) AB წრფესა და C_1C წრფეს შორის;
გ) AD წიბოსა და BB_1C_1C წახნაგს შორის;
დ) (ABC) სიბრტყესა და ($A_1B_1C_1$) სიბრტყეს შორის.

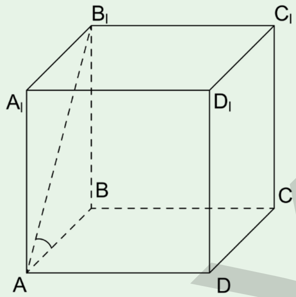
8 მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 6 სმ. მისი O ცენტრიდან აღმართულია OM მართობი. OM=8 სმ. იპოვე მანძილი M წერტილიდან კვადრატის: ა) წვერომდე; ბ) გვერდამდე.

9 მოცემულია ABCD მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია: AB=6 სმ; BC=8 სმ. B წვეროდან აღმართულია BM მართობი. BM=10 სმ. იპოვე მანძილი M წერტილიდან:
ა) A წვერომდე; ბ) C წვერომდე;
გ) D წვერომდე; დ) AB გვერდამდე;
ე) BC გვერდამდე; ვ) AD გვერდამდე;
ზ) CD გვერდამდე .

10 მოცემულია კუბი, რომლის გვერდითი წახნაგის AB_1 დიაგონალის სიგრძეა $8\sqrt{2}$ სმ. იპოვე:

ა) $tg(\angle B_1AB)$; ბ) მანძილი AB-სა და DD_1C_1C წახნაგს შორის;

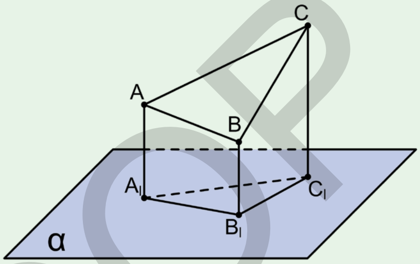
გ) (AB_1)-სა და DD_1C_1C-ს შორის.



11 ABC სამკუთხედის წვეროები დაშორებულია α სიბრტყიდან 4სმ, 8სმ და 10სმ-ით. $\alpha\cap(ABC)=\varnothing$. იპოვე მანძილი:

ა) გვერდების შუაწერტილებიდან სიბრტყემდე;

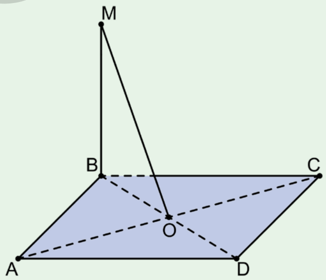
ბ) მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან სიბრტყემდე.



12 მოცემულია a წიბოს მქონე $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. იპოვე მანძილი AD წიბოსა და A_1B დიაგონალს შორის.

13 მე-9 ამოცანის პირობის მიხედვით იპოვე მანძილი M წერტილიდან AC დიაგონალამდე.

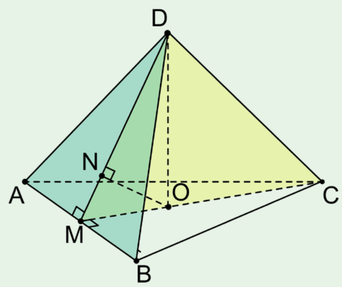
14 ABCD პარალელოგრამის B წვეროდან აღმართულია BM მართობი. M წერტილი შეერთებულია პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილთან. $MO\perp AC$. იპოვე პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ AB=12 სმ.



15 M წერტილი ABC მართკუთხა სამკუთხედის ყველა წვეროდან დაშორებულია 8 სმ-ის ტოლი მანძილით. იპოვე მანძილი M წერტილიდან (ABC) სიბრტყემდე, თუ კათეტები 6 სმ-ის და 8 სმ-ის ტოლია.

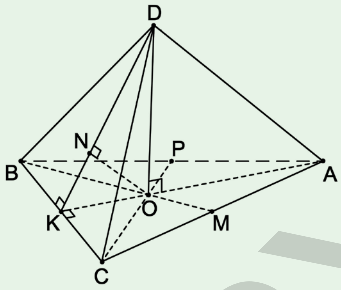
16 ABC მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის O ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია OM მართობი. სამკუთხედის AC და BC კათეტები შესაბამისად 6 სმ და 8 სმ-ის ტოლია. OM=5 სმ. იპოვე მანძილი M წერტილიდან: ა) სამკუთხედის გვერდებამდე; ბ) სამკუთხედის წვეროებამდე.

17 მოცემულია DABC პირამიდა, რომლის ყველა წიბოს სიგრძეა a სმ. DO მართობულია ABC სიბრტყის, DM მართობულია AB გვერდის. ON მართობულია DM-ის. ა) დაამტკიცე, რომ ON მართობულია ABD სიბრტყის. ბ) გამოთვალე მანძილი O წერტილიდან ABD სიბრტყემდე.



ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №10

1-3 ამოცანებში ისარგებლე მოცემული ნახაზით და შემდეგი პირობებით: ABC წესიერი სამკუთხედის O ცენტრიდან აღმართულია OD მართობი. D წერტილი შეერთებულია სამკუთხედის წვეროებთან.



1 ორწახნაგა კუთხე BC წიბოსთან არის:

ა) $\angle DCO$; ბ) $\angle DKO$;

გ) $\angle ABC$; დ) $\angle ADK$.

2 მანძილი O ცენტრიდან BCD წახნაგამდე არის:

ა) ON მონაკვეთის სიგრძე;

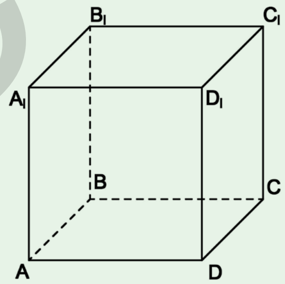
ბ) OK მონაკვეთის სიგრძე;

გ) OD მონაკვეთის სიგრძე;

დ) OC მონაკვეთის სიგრძე.

3 მანძილი D წერტილიდან (ABC) სიბრტყემდე არის:

ა) DK; ბ) DC; გ) DN; დ) DO.



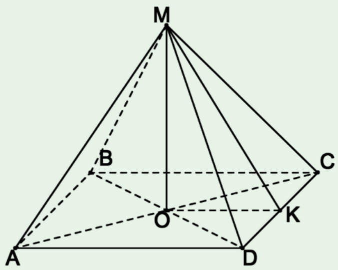
4 მოცემულია კუბი. AB=a. BB_1D_1D-ს ფართობია:

ა) a^2 ; ბ) $2a^2$;

გ) $a^2\sqrt{2}$; დ) 4a.

5 კუბის წახნაგის C_1D დიაგონალი $6\sqrt{2}$ სმ-ის ტოლია. რას უდრის მანძილი D_1 წვეროდან ABCD კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე?

ა) $3\sqrt{6}$ სმ; ბ) 6 სმ; გ) $3\sqrt{2}$ სმ; დ) $6\sqrt{3}$ სმ.



6 ABCD კვადრატის O ცენტრიდან აღმართულია 8 სმ-ის ტოლი OM მართობი. M შეერთებულია DC გვერდის K შუა წერტილთან. რას უდრის MK მონაკვეთის სიგრძე, თუ DC=12 სმ?

ა) 8; ბ) 12; გ) 10; დ) 7.

7 იხილე წინა ამოცანის პირობა. გამოთვალე MC-სა და (ABC)-ს შორის კუთხის ტანგენსი.

8 α სიბრტყის გარეთ აღებული A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებული AB მართობის სიგრძეა 10 სმ. AC დახრილსა და α სიბრტყეს შორის კუთხეა 30°. იპოვე AB მართობის გეგმილი AC დახრილზე.

აბა, სცადე!

მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. (იხილე 4.4 პარაგრაფის მე-8 ამოცანის ნახაზი). იპოვე (AB_1D_1) და (BDC_1) სიბრტყეებს შორის მანძილი, თუ კუბის წიბოა a.

თავი 5. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები

ამ თავში ისწავლი:

- ❖ ლოგარითმის განმარტებასა და თვისებებს;
- ❖ მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს;
- ❖ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნის მეთოდებს;
- ❖ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული უტოლობების ამოხსნის მეთოდებს.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- ❖ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გრაფიკების აგებას და თვისებების დადგენას;
- ❖ ლოგარითმის თვისებების გამოთვლების საწარმოებლად და ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი განტოლებებისა და უტოლობების ამოსახსნელად გამოყენებას;
- ❖ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებებისა და უტოლობების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებას (ამოცანები საბანკო საქმეზე, რადიოაქტიური ნივთიერებებზე, მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილებაზე და ა.შ.).

ჯონ ნეპერი
1550-1617 წწ.
შოტლანდიელი მეცნიერი ლოგარითმის ცნების აღმომჩენი და მისი ცხრილების შემდგენელი

კომპლექსური დავალება
„საქართველოს მოსახლეობა“
სამიზნე ცნებები: მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

მსოფლიოს მოსახლეობის რაოდენობა ბოლო ათწლეულების განმავლობაში ყოველწლიურად, დაახლოებით, 1%-ით იზრდება და 2022 წელს 8 მილიარდს გადააჭარბა მაშინ, როცა 2000 წელს 6 მილიარდს არ აღემატებოდა.

სამწუხაროდ, პირიქით ტენდენციას აქვს ადგილი საქართველოს შემთხვევაში. ჩვენთან მოსახლეობის აშკარა კლება შეინიშნება. მაგალითად, თუ 1994 წელს საქართველოში 4 მილიონ 930 ათასი ადამიანი ცხოვრობდა, 2022 წლის მონაცემებით, მოსახლეობის რაოდენობა 3 მილიონ 700 ათასამდე შემცირდა. განსაკუთრებით თვალშისაცემია ახალგაზრდების ქვეყნიდან გადინება. თუ კლების ეს ტენდენცია გაგრძელდა, ჩვენს ქვეყანას დემოგრაფიული კატასტროფა ელოდება: სპეციალისტთა გამოთვლებით 2060 წლისთვის მოსახლეობა 2022 წლის რაოდენობის ნახევარი, ხოლო საუკუნის ბოლოსთვის მესამედი იქნება. ეს კი არა მარტო საფრთხეს შეუქმნის ქვეყნის მდგრად განვითარებასა და ნორმალურ ფუნქციონირებას, არამედ კითხვის ნიშნის ქვეშ დააყენებს ერის არსებობასაც.

მიტოვებული სოფელი

შენი დავალება:

1. ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების საშუალებით გადაამოწმე ზემოჩამოთვლილი მონაცემები;

2. ისარგებლე რთული პროცენტის ფორმულით და გამოთვალე 1994 წლიდან 2022 წლამდე საშუალოდ, რამდენი პროცენტით მცირდებოდა საქართველოს მოსახლეობა ყოველწლიურად.

3. დაადგინე, იმ შემთხვევაში თუ მოსახლეობის შემცირება ამავე ტემპით გაგრძელდა, რა რაოდენობას მიაღწევს ქვეყნის მოსახლეობა:

ა) 2060 წლისთვის;

ბ) საუკუნის ბოლოსთვის;

გ) რომელი წლისთვის იქნება მოსახლეობის რაოდენობა განახევრებული.

4. ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი ღონისძიებები მიგაჩნია საჭიროდ, რათა ქვეყანამ აიცილოს დემოგრაფიული კატასტროფა:

- ინვესტიციების მოზიდვა;
- შობადობის ამაღლების ხელშეწყობა;
- განათლების სისტემის გაუმჯობესება;
- სპორტული მოედნების მოწყობა;
- სამუშაო ადგილების შექმნა;
- უცხოელების ჩამოსახლება;
- მრეწველობის თანამედროვე დარგების განვითარების ხელშეწყობა;
- სოფლის მეურნეობის განვითარების ხელშეწყობა;
- ტექნოლოგიების დანერგვა;
- ხელფასების გაზრდა;
- სოციალური დახმარების გაზრდა;
- ახალგაზრდების უცხოეთში მიგრაციის აკრძალვა;
- ნეპოტიზმთან ბრძოლა.

დაალაგე მოცემულთაგან შენთვის მისაღები ღონისძიებები პრიორიტეტების მიხედვით და დაასაბუთე შენი მოსაზრება.

5. ვთქვათ, გატარდა საჭირო ღონისძიებები და მოსახლეობამ იმავე პროცენტით, რა პროცენტითაც იკლებდა, დაიწყო ზრდა. დაადგინე:

ა) რომელ წელს გაუტოლდება მოსახლეობის რაოდენობა 1994 წლის მონაცემს;

ბ) რამდენ წელწადში გაორმაგდება მოსახლეობა;

გ) რამდენ წელიწადში იქნება მოსახლეობის რაოდენობა 5 მილიონზე მეტი.

6. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- როგორ დაადგინე საშუალო წლიური კლების პროცენტი;
- როგორ გამოთვალე მოსახლეობის განახევრებისა ან/და გაორმაგებისათვის საჭირო წლების რაოდენობა?
- რა ნიშნით შეარჩიე ჩასატარებელი ღონისძიებები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო გამოთვლების ჩასატარებლად.

5.1 ხარისხის თვისებები

მიზანი

ხარისხის თვისებების გამეორება და მათი გამოყენების უნარის განვითარება

პირველ რიგში გავიხსენოთ, რომ თუ r რაციონალური რიცხვია, $r=\frac{m}{n}$, სადაც m მთელი, ხოლო $n>1$ ნატურალური რიცხვია, მაშინ ნებისმიერი $a>0$ რიცხვისთვის a^r განიმარტება ტოლობით:

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,.$$

მაგალითად, $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4$.

კიდევ ერთხელ ჩამოვწეროთ ხარისხის თვისებები და მოვიყვანოთ სათანადო მაგალითები. ვთქვათ, a და b დადებითი რიცხვები, ხოლო r, r_1 და r_2 ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია. მართებულია ტოლობები:

1. $(ab)^r=a^rb^r$;

მაგალითად, $(125\cdot27)^{\frac{2}{3}}=125^{\frac{2}{3}}\cdot27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^2}\cdot\sqrt[3]{27^2}=\left(\sqrt[3]{125}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=5^2\cdot3^2=225$;

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$;

მაგალითად, $\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{125^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{125^2}}{\sqrt[3]{27^2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{125}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$.

3. $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;

მაგალითად, $7^{\frac{3}{4}}\cdot7^{\frac{1}{4}}=7^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=7$.

4. $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}=a^{r_1-r_2}$;

მაგალითად, $\frac{9^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}=9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$.

5. $\left(a^{r_1}\right)^{r_2}=a^{r_1r_2}$;

მაგალითად, $(125\cdot27)^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}\cdot(3^3)^{\frac{2}{3}}=5^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot3^{3\cdot\frac{2}{3}}=5^2\cdot3^2=225$;

მოცემული თვისებების გამოყენებით ნებისმიერი დადებითი a რიცხვისათვის გვაქვს:

$$a^0=a^{r-r}=\frac{a^r}{a^r}=1 \text{ და } a^{-r}=a^{0-r}=\frac{a^0}{a^r}=\frac{1}{a^r}.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{27}\cdot125^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}$; ბ) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

ამოხსნა: ა) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{27}\cdot 125^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{\frac{2}{3}}=$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=\frac{8}{27}-\frac{1}{225}=\frac{197}{675};$

ბ) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{40}{9}\right)^{-2}=\frac{81}{1600}.$

მაგალითი 2. გავამარტივოთ გამოსახულება: $\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}$.

ამოხსნა. $\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}=\frac{\left(x^{0,5}\right)^{2}-\left(y^{0,5}\right)^{2}}{x^{0,5}+y^{0,5}}=\frac{\left(x^{0,5}-y^{0,5}\right)\cdot\left(x^{0,5}+y^{0,5}\right)}{x^{0,5}+y^{0,5}}=x^{0,5}-y^{0,5}=$

$=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$

პასუხი: $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

ხარისხის გამოსათვლელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კალკულატორი:

1) შევიყვანოთ ხარისხის ფუძე;
2) დავაჭიროთ „x^y“ კლავიშს;
3) შევიყვანოთ ხარისხის მაჩვენებელი;
4) დავაჭიროთ კლავიშს „=“ ან კლავიატურაზე კლავიშს „Enter“;
5) ეკრანზე დაიწერება ხარისხის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

მომდევნო პარაგრაფებში მოგვიწევს ისეთი ხარისხის განხილვა, რომლის ხარისხის მაჩვენებელი ირაციონალური რიცხვია. მაგალითად, როგორ განვსაზღვროთ $\sqrt{2}$ ან როგორ გამოვთვალოთ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა?

ამ შემთხვევაში უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც ვიქცევით ირაციონალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებისას. კერძოდ, $\sqrt{2}$ ჩავანაცვლოთ მისი მიახლოებითი რაციონალური მნიშვნელობებით: $2^{\sqrt{2}}\approx 2^{r_k}$, სადაც r_k არის $\sqrt{2}$-ის 10^{-k} სიზუსტის მიახლოებითი მნიშვნელობა. მტკიცდება, რომ არსებობს ერთადერთი ნამდვილი a რიცხვი, რომელთანაც 2^{r_k} მიმდევრობის წევრები k-ს გაზრდის ხარჯზე რაგინდ ახლოს მიდიან. $2^{\sqrt{2}}$ ამ a რიცხვს ეწოდება. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობები გამოითვლება კალკულატორით, თუ ხარისხის მაჩვენებელს მისი მახლობელი სასრული ათწილადით ჩავანაცვლებთ.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება $a^{\frac{m}{n}}$, სადაც $a>0$, $m\in Z$, $n\in N$?
2. რას უდრის a^{-r}, სადაც $a>0$?
3. რის ტოლია 7^0?
4. რა შემთხვევაში იკრიბება ხარისხის მაჩვენებლები?
5. რა შემთხვევაში მრავლდება ხარისხის მაჩვენებლები?

სავარჯიშოები

1 გამოსახულება ჩაწერე ფესვის სახით (იგულისხმება, რომ ყოველ გამოსახულებაში ხარისხის ფუძე დადებითია):

ა) $17^{\frac{2}{3}},\ 7^{\frac{1}{2}},\ 27^{-\frac{2}{3}},\ 16^{0,25},\ 7^{-0,75},\ 7;$

ბ) $a^{\frac{1}{3}},\ b^{-0,1},\ x^{0,5},\ y^{-0,3},\ c^{-1,2},\ z^{1,2},\ x;$

გ) $(5a)^{\frac{1}{3}},\ (3a)^{\frac{2}{3}},\ (2a)^{-\frac{1}{3}},\ (2x)^{\frac{1}{5}},\ (2x)^{-\frac{1}{5}},\ (a^2b^3)^{\frac{1}{5}},\ (a^2x)^{-\frac{2}{5}};$

დ) $(a-b)^{\frac{1}{2}},\ (a-b)^{\frac{1}{4}},\ (a+b)^{-\frac{3}{4}},\ (a+b)^{\frac{1}{4}},\ (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

2 წარმოადგინე კვადრატის სახით:

ა) $3^{\frac{1}{2}},\ 5^{-\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{2}{3}},\ 3^{-\frac{1}{4}},\ 7^{0,5},\ 2^{0,25},\ (0,0001)^{0,75};$

ბ) $7^{\frac{1}{2}},\ 8^{-\frac{2}{3}},\ 9^{\frac{3}{4}},\ 16^{-\frac{1}{4}},\ 5^{0,3},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{0,2},\ 3^{\frac{1}{3}}.$

3 წარმოადგინე კუბის სახით:

ა) $a^6,\ a^{12},\ a^{\frac{1}{6}},\ b^{-\frac{1}{3}},\ b^{15},\ b^{0,9};\ c^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{6}}\ (a>0,\ b>0,\ c>0);$

ბ) $a^9,\ a^2,\ a^{-\frac{1}{2}},\ b^{\frac{1}{4}},\ b^{-12},\ b^{0,3},\ c^{\frac{1}{15}},\ c^{-\frac{1}{5}},\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$

4 წარმოადგინე ხარისხის სახით:

ა) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}},\ \frac{\sqrt[5]{9}}{27},\ \frac{3}{\sqrt[5]{81}},\ \left(\sqrt[3]{9}\right)^5,\ \left(\sqrt[4]{3}\right)^{-\frac{1}{3}};$

ბ) $\sqrt{\sqrt[5]{3^2}},\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{3}},\ \sqrt{\sqrt[4]{3^5}},\ \sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}};$

გ) $\sqrt{\sqrt[5]{3^{\frac{2}{3}}}},\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{3^{\frac{3}{5}}}},\ \sqrt{\sqrt[4]{3^{\frac{1}{3}}}},\ \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\sqrt[3]{3}};$

დ) $\sqrt[3]{x^2},\ \sqrt{a^3b},\ \sqrt[5]{2a},\ \sqrt[5]{a^3},\ \sqrt{\sqrt[3]{x^7}},\ \sqrt[5]{y\sqrt{x}},\ \sqrt[7]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}.$

5 წარმოადგინე ფესვის სახით:

ა) $a^{\frac{1}{5}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}};$ ბ) $b^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{12}}\sqrt{b};$ გ) $\left(c^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{8}}c^{\frac{1}{2}}\right)^2;$

დ) $\sqrt[5]{a^{-2}\sqrt{a^3}};$ ე) $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}};$ ვ) $\sqrt{\frac{x^5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}}.$

6 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{4}}$; ბ) $81^{\frac{2}{3}} : 81^{\frac{1}{6}}$; გ) $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}$; დ) $625^{\frac{2}{3}}$;

ე) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$; ვ) $\frac{\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^4}{\sqrt[3]{a^4}}$; ზ) $a^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$; თ) $a^{1,3} : \left(\frac{1}{a}\right)^{-0,7}$;

ი) $9^{\frac{1}{3}} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$; კ) $a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; ლ) $\sqrt[6]{x^{-3}}$; მ) $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$;

ნ) $a^{\frac{5}{12}} \cdot x^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$; ო) $\frac{\left(x^{-0,5}\right)^3 x^{\frac{6}{7}}}{\left(x^{-4}\right)^{\frac{2}{7}}}$.

7 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $0,5\left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12}$; ბ) $36^{0,4} \cdot 2^{0,2} \cdot 3^{\frac{1}{5}}$; გ) $\left(5^{-2} \cdot 25\right)^{-3} \cdot \left(9 \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{7}}$;

დ) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$; ე) $\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^{12}$; ვ) $\left(16^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}$; ზ) $125^{\frac{2}{3}}$;

თ) $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; ი) $\left(512^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$; კ) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 81 \cdot 3^{-2\frac{1}{2}}$; ლ) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$;

მ) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$; ნ) $2^{1\frac{5}{12}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$; ო) $25^{\frac{2}{3}} \cdot 135^{\frac{2}{3}}$.

8 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(100^{-0,5} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 0,2^{-\frac{1}{2}} \cdot 4^{-\frac{3}{4}} \cdot 4^{-0,75}\right)^2$; ბ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot 0,0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$;

გ) $\frac{12^{0,5} \cdot 8^{0,5}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 8} \cdot \frac{3^{0,5} \cdot 7^{\frac{4}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}}$; დ) $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1,5} + \left(0,125^0\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4$.

9 გამოთვალე გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\left(27^{-\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} - (0,25)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$; ბ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 0,0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$;

გ) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$; დ) $\left[8^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

10 კალკულატორის გამოყენებით იპოვე რაციონალური რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის:

ა) $\left(\sqrt{15}; 4\right)$ შუალედს; ბ) $\left(\sqrt{2}; \sqrt[3]{3}\right)$ შუალედს;

გ) $\left(2^{1,2}; 2^{1,3}\right)$ შუალედს; დ) $\left(2^{-1,3}; 2^{-1,2}\right)$ შუალედს.

11 გამოთვალე:

ა) $\left\{\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(25^{0,5}\cdot 25\right)^{2}\right]:\left(\frac{125^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{13}{8}}}{625^{-\frac{1}{4}}\cdot 32}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{16}}$;

ბ) $\left[5\left(\sqrt{125}\right)^{-\frac{2}{3}}-25^{0,5}81^{-0,25}\right]\cdot\left[\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}+81^{-0,25}\right]$.

12 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\frac{x-1}{x+x^{0,5}+1}\left(\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}\right)^{-1}+\frac{1}{x^{-0,5}\cdot 2^{-1}}$; ბ) $\frac{1-x^{-2}}{x^{0,5}+x^{-0,5}}+\frac{2}{x^{1,5}}+\frac{x^{-1}-x^{2}}{x^{1,5}-x^{0,5}}$.

13 გაამარტივე:

ა) $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2+8x+16}$, სადაც $-4<x<4$;

ბ) $\sqrt{25-10x+x^2}+\sqrt{x^2+10x+25}$, სადაც $x<-5$;

გ) $\sqrt{49-14x+x^2}+\sqrt{x^2+14x+49}$, სადაც $x>7$;

დ) $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2+8x+16}$, სადაც $x>4$.

14 იპოვე x და y, თუ:

ა) $\begin{cases}9^x\cdot 3^3\cdot 27^{2y}=81,\\ 9^y\cdot 3^4\cdot 27^x=243;\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}8^x\cdot 4^4\cdot 4^{4y}=32,\\ 16^y\cdot 2^4\cdot 4^{3x}=64.\end{cases}$

15 დაადგინე x+y გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ:

ა) $54\left(9^y\right)^2 3^{4x}=162$; ბ) $2\cdot 9^{3x}\cdot 27^{2y}=18$; გ) $8^x\cdot 2^{4+3y}=32$.

16 იპოვე $5x+5y$, თუ:

ა) $\begin{cases}9^x\cdot 27^y=81,\\ 9^y\cdot 27^x=243;\end{cases}$ ბ) $\begin{cases}9^{2x}\cdot 27^y=9,\\ 8^y\cdot 4^x=4.\end{cases}$

17 ვთქვათ, N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე, Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. გაიხსენე ამ სიმრავლეთა შორის მიმართებები და გამოსახე ეს მიმართებები ვენის დიაგრამით.

18 გაარკვიე, მოცემულთაგან რომელია რაციონალური და რომელი ირაციონალური რიცხვი.

ა) $2^{\frac{1}{2}}$; ბ) $\sqrt[3]{8}$; გ) $-\frac{15}{17}$; დ) $\sqrt[3]{111}$; ე) $\sqrt{5\cdot 125}$;

ვ) $\sqrt[3]{81}$; ზ) $\left(\sqrt{17}-4\right)\cdot\left(\sqrt{17}+4\right)$.

19 გაიხსენე რთული პროცენტით დარიცხვის ფორმულა და გამოთვალე, რამდენი თანხა დაგროვდება ბანკში r წლის განმავლობაში 10 პროცენტიანი დარიცხვით, თუ საწყისი თანხაა 1000 ლარი, ხოლო ა) r=2; ბ) r=1,5; გ) r=3,2.

5.2 მაჩვენებლიანი ფუნქცია, მისი თვისებები და გრაფიკი

მიზანი

- მაჩვენებლიანი ფუნქციის ცნების შემოტანა;
- მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების შესწავლა;
- მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის აგება

ამოცანა. ქალაქში, რომლის მოსახლეობა ყოველწლიურად საშუალოდ p პროცენტით იზრდება, ამჟამად M მოსახლე ცხოვრობს. რა რაოდენობის მოსახლე იქნება ქალაქში x წლის შემდეგ?

ამოხსნა. x წლის შემდეგ მოსახლეობის რაოდენობა აღვნიშნოთ M(x)-ით და მის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ რთული პროცენტის ფორმულით:

$$M(x)=M\left(1+\frac{p}{100}\right)^{x}. \qquad (1)$$

პასუხი: ქალაქში x წლის შემდეგ იქნება $M(x)=M\left(1+\frac{p}{100}\right)^{x}$ მცხოვრები.

1-ელი ფორმულა მართებულია წლების არამთელი რაოდენობისთვისაც. მაგალითად, თუ გვაინტერესებს მოსახლეობის რაოდენობა წელიწად-ნახევრის შემდეგ, მაშინ x=1,5, ხოლო თუ ორი წლისა და სამი თვის შემდეგ, მაშინ x=2,25.

საზოგადოდ, იმის გამო, რომ ჩვენთვის ცნობილია ხარისხი ნებისმიერი რაციონალური მაჩვენებლით, 1-ელი ტოლობა შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი რაციონალური x-ის შემთხვევაში. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ 1-ელი ტოლობით მოცემულია M(x) ფუნქცია, რომლის არგუმენტი x ხარისხის მაჩვენებელს წარმოადგენს. ასეთ ფუნქციას **მაჩვენებლიანი ფუნქცია** ეწოდება.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის ზოგადი სახეა $y=a^x$, სადაც a მუდმივი, ხოლო x და y ცვლადი სიდიდეებია, რომელთაგან x არგუმენტი, ხოლო y ამ არგუმენტის ფუნქციაა.

იმისათვის, რომ $y=a^x$ მაჩვენებლიან ფუნქციას აზრი ჰქონდეს ნებისმიერი რაციონალური x არგუმენტისათვის, უნდა მოვითხოვოთ, რომ a>0. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ ისეთ უაზრო გამოსახულებებს, როგორებიცაა, მაგალითად 0^{-1}, $(-1)^{\frac{1}{2}}$. ასევე უნდა მოვითხოვოთ, რომ $a\neq1$, რადგან $y=1^x=1$, მუდმივი ფუნქციაა, რაც შესწავლას არ საჭიროებს.

მაშ ასე, $y=a^x$ ფუნქციის განხილვისას უნდა მოვითხოვოთ, რომ a მოცემული დადებითი და 1-ისგან განსხვავებული რიცხვია.

რაც შეეხება x არგუმენტს, ის ჯერჯერობით რაციონალურ რიცხვად უნდა მივიჩნიოთ, რადგან ხარისხის განმარტება და თვისებები მხოლოდ რაციონალური ხარისხის მაჩვენებლის შემთხვევაში ვიცით. ჩვენი მიზანია $y=a^x$ ფუნქცია განვავრცოთ და შევისწავლოთ მთელ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე. ამისათვის კი, ჯერ დავადგინოთ თვისებები რაციონალური x-ის შემთხვევაში.

$y=a^x$ ფუნქციის თვისებების დადგენისას უნდა განვასხვაოთ ორი შემთხვევა: როცა a>1 და

0<a<1. სიმარტივისთვის განვიხილოთ a=2 და $a=\frac{1}{2}$ შემთხვევები.

გამოვიკვლიოთ $y=2^x$ ფუნქცია.

1) $y=a^x$ ფუნქცია მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს იღებს.

მართლაც, ვთქვათ $x=\frac{m}{n}$, მაშინ $y=2^x=2^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{2^m}>0$, რადგან n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი განმარტების თანახმადაა დადებითი.

2) როცა x>0, მაშინ y>1, როცა x=0, y=1, ხოლო როცა x<0, მაშინ y<1.

მართლაც, ვიცით რომ 2-ის დადებითი ხარისხი 1-ზე მეტია, 0 ხარისხი 1-ის ტოლი, ხოლო უარყოფითი ხარისხი 1-ზე ნაკლებია.

3) $y=a^x$ ზრდადი ფუნქციაა.

მართლაც, ვთქვათ $x_1>x_2$. $2^{x_1}-2^{x_2}=2^{x_2}\left(2^{x_1-x_2}-1\right)$, სადაც 1-ელი თვისების გამო $2^{x_2}>0$, ხოლო მე-2 თვისების გამო $2^{x_1-x_2}-1>0$. მივიღეთ $2^{x_1}-2^{x_2}>0$, რაც ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განმარტებული $y=a^x$ ზრდადი ფუნქციაა.

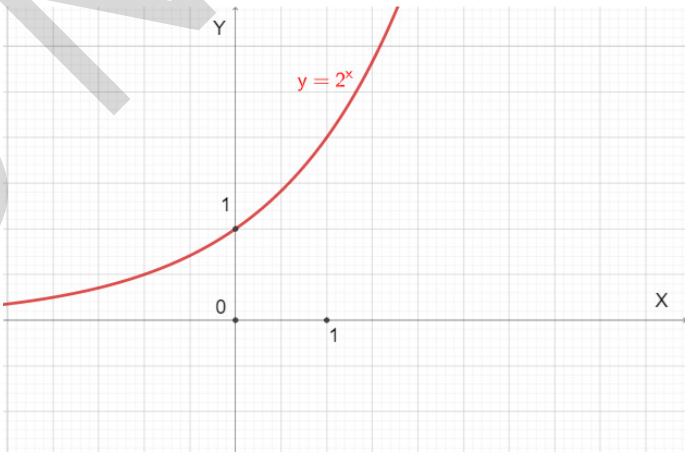
მე-3 თვისება საშუალებას გვაძლევს მაჩვენებლიანი ფუნქცია განვმარტოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე:

$y=a^x$ ფუნქცია ნებისმიერი ნამდვილი x არგუმენტისათვის ეწოდება ისეთ y=f(x) ზრდად ფუნქციას, რომლისთვისაც ყოველი რაციონალური x-ისთვის სრულდება ტოლობა: $f(x)=2^x$.

გრაფიკის აგების მიზნით შევადგინოთ $y=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი:

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

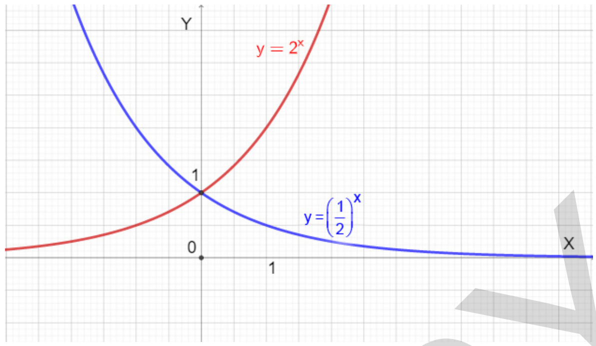
დავიტანოთ მიღებული $(x;\ 2^x)$ წყვილები საკოორდინატო სიბრტყეზე და ეს წერტილები შევაერთოთ გლუვი წირით. მიღებული წირი იქნება $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ.1).



ნახ. 1

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქცია შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ იმავე სქემით, რომლითაც გამოვიკვლიეთ $y=2^x$ ფუნქცია. ამ შემთხვევაში განსხვავება მხოლოდ ისაა, რომ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქცია კლებადია.

გრაფიკის ასაგებად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ თუ (x;y) წერტილი ეკუთვნის $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ (–x;y) წერტილი ეკუთვნის $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკს და პირიქით. ეს კი ნიშნავს, რომ ამ ფუნქციათა გრაფიკები ურთიერთსიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. მე-2 ნახაზზე ერთ საკოორდინატო სიბრტყეშია წარმოდგენილი $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ და $y=2^x$ ფუნქციათა გრაფიკები.



ნახ. 2

მიღებულ გრაფიკებზე დაყრდნობით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ $y=a^x$ ფუნქციის თვისებები:

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;+\infty)$;
2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(0;+\infty)$
3. თუ $a>1$, მაშინ ფუნქცია ზრდადია;
4. თუ $0<a<1$, მაშინ ფუნქცია კლებადია.
5. გრაფიკი აბსცისათა ღერძს არ კვეთს, ხოლო ორდინატთა ღერძს კვეთს (0;1) წერტილში.

მაგალითი 1. წერტილი $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ კოორდინატებით ეკუთვნის $f(x)=a^x$ ფუნქციის გრაფიკს. ვიპოვოთ f(5).

ამოხსნა. რადგან $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ წერტილი ეკუთვნის $f(x)=a^x$ ფუნქციის გრაფიკს, ამიტომ

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, ანუ $a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{a}=2\Rightarrow a=4$, მაშინ $f(5)=4^5=1024$.

პასუხი: 1024.

მაგალითი 2. რომელია მეტი: ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ თუ $9^{-1,1}$? ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ თუ 1?

ამოხსნა. ა) ვთქვათ, $f(x)=3^x$, მაშინ $\left(\frac{1}{3}\right)^2=3^{-2}=f(-2)$, ხოლო $9^{-1,1}=3^{-2,2}=f(-2,2)$.

$f(x)=3^x$ ზრდადი ფუნქციაა და რადგან $-2>-2,2$, ამიტომ $f(-2)>f(-2,2)$, ანუ $\left(\frac{1}{3}\right)^2>9^{-1,1}$;

ბ) ვთქვათ, $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ მაშინ $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}=f\left(\sqrt{2}\right)$, ხოლო $1=f(0)$. $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ კლებადი ფუნქცია და რადგან $\sqrt{2}>0$, ამიტომ $f\left(\sqrt{2}\right)<f(0)$, ანუ $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}<1$.

პასუხი: ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^2<9^{-1,1}$; ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}<1$.

მაგალითი 3. დაალაგე კლების მიხედვით ხარისხები: $a^{\sqrt{5}}$, a^{5}, $a^{\sqrt{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, თუ $a^{-\sqrt{3}} > a^{8}$.

ამოხსნა. განვიხილოთ $f(x)=a^x$ ფუნქცია. რადგან $f\left(-\sqrt{3}\right)=a^{-\sqrt{3}} > f\left(\sqrt{8}\right)=a^{\sqrt{8}}$, ამიტომ $f(x)=a^x$ ფუნქცია კლებადია. ე.ი.

$$5>\sqrt{5}>\sqrt{3}>\frac{2}{3} \Rightarrow f(5)<f\left(\sqrt{5}\right)<f\left(\sqrt{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right),$$ ანუ $a^{\frac{2}{3}} > a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{5}} > a^{5}$.

პასუხი: $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\sqrt{3}}$, $a^{\sqrt{5}}$, a^{5}.

უპასუხე კითხვებს:

1. რატომ უწოდეს $f(x)=a^x$ ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია?
2. რამდენჯერ მიიღებს $y=7^x$ ფუნქცია: 1, 11, –7 მნიშვნელობას?
3. რა შემთხვევაშია მაჩვენებლიანი ფუნქცია ზრდადი? კლებადი?
4. რა არის $f(x)=a^x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
5. x ცვლადის რა მნიშვნელობებისთვისაა $f(x)=2^x$ ფუნქციის მნიშვნელობები:
   ა) 1-ზე მეტი? ბ) 1-ზე ნაკლები?

სავარჯიშოები

1 საკოორდინატო სიბრტყის მოცემული წერტილებიდან რომელი წერტილები ეკუთვნის $y=7^x$ ფუნქციის გრაფიკს?

$(0;2)$, $(0;1)$, $(-2;\frac{1}{7})$, $(-2;\frac{1}{49})$, $(-2;\frac{1}{9})$, $(3;21)$, $(3;81)$, $(-1;7)$, $(-1;7^{-1})$.

2 საკოორდინატო სიბრტყის მოცემული წერტილებიდან რომელი წერტილები ეკუთვნის $y=\sqrt{3^x}$ ფუნქციის გრაფიკს?

$(0;\sqrt{3})$, $(0;-1)$, $(-2;\frac{1}{3})$, $(-2;\frac{1}{9})$, $(-3;-\frac{1}{27})$, $(0;1)$, $(\sqrt{3};\sqrt{3}^{\sqrt{3}})$, $(-1;\sqrt{3})$, $(-1;3^{-0,5})$.

3 სიბრტყის (2;3) წერტილი ეკუთვნის $f(x)=a^x$ ფუნქციის გრაფიკს. იპოვე:

ა) $f(0)$; ბ) $f(4)$; გ) $f(-1)$; დ) $f(0,5)$.

4 შეადარე:

ა) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2}$ და $7^{-2,1}$; ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5}$ და 1; გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,2}$ და 1;

დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ და $4^{-0,9}$; ე) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$ და $9^{1,7}$; ვ) $2^{-\sqrt{3}}$ და $2^{-1,7}$;

ზ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$ და $3^{\sqrt{3}}$; თ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{12}}$ და $9^{\sqrt{3}}$.

5 დაალაგე ზრდის მიხედვით რიცხვები:

ა) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{2}}$;

ბ) 1, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{11}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,01}$.

6 დაალაგე კლების მიხედვით რიცხვები:

$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{11}}$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}$, $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}}$.

7 მოცემულია ფუნქცია: $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{x}$. შეადარე:

ა) $f(3)$ და $f(-2)$; ბ) $f(-3)$ და $f(-2)$;

გ) $f(3)$ და $f(2)$; დ) $f(3)$ და 1; ე) $f(-3)$ და 1.

8 იპოვე x, თუ:

ა) $3^{x}=27$; ბ) $2^{x}=16$; გ) $4^{x}=64$; დ) $1024=4^{x}$.

9 გაიტანე ფრჩხილებს გარეთ ხარისხი უცნობი მაჩვენებლით:

ა) $3^{x+1}+5\cdot 3^{x}$; ბ) $7^{x+2}+5\cdot 7^{x}$;

გ) $35^{x+1}+5^{x}\cdot 7^{x}$; დ) $2^{x+1}-2^{x-2}-2^{x}$.

10 $f(x)=2^{x}$ ფუნქციისათვის გამოთვალე:

ა) $f\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot f\left(3-\sqrt{2}\right)$; ბ) $\frac{f\left(-2+\sqrt{7}\right)}{f\left(-5+\sqrt{7}\right)}$;

გ) $\left(f\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; დ) $\frac{8f(3)}{f(5)}$; ე) $\frac{f(2)}{f(0)}$.

11 იპოვე $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები, თუ:

ა) $f(x)=x^{2}-9$; ბ) $f(x)=\sqrt{x}-3$; გ) $f(x)=3^{x}-3$;

დ) $f(x)=2^{x}-\frac{1}{8}$; ე) $f(x)=2^{x-3}-\frac{1}{4}$; ვ) $f(x)=\sqrt{5}^{x+3}-25$.

12 იპოვე $y=f(x)$ ფუნქციის ნულები, თუ:

ა) $f(x)=2x+7$; ბ) $f(x)=2x^{2}-5x+2$; გ) $f(x)=3\sqrt[3]{x}-6$;

დ) $f(x)=\sqrt{3}^{x}-3^{-1}$; ე) $f(x)=8^{x}-\frac{1}{2}$; ვ) $f(x)=3^{x^{2}-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{9}$.

13 ზრდადია, კლებადია თუ არც ზრდადია და არც კლებადი ქვემოთ მოცემული ფუნქცია?

ა) $f(x)=\left(\sqrt{3}-1\right)^x$; ბ) $h=\left(\sqrt{5}-1\right)^x$; გ) $g(x)=\sqrt[3]{x}-1$;

დ) $u(x)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, ე) $v(x)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$, ვ) $q(x)=\sin^x 20^\circ$.

14 შეადარე a და b, თუ:

ა) $f_1(x)=\left(\sqrt{3}-a\right)^x$ ზრდადი, ხოლო $f_2(x)=\left(\sqrt{3}-b\right)^x$ კლებადი ფუნქციაა;

ბ) $g_1(x)=(a+0,3)^x$ კლებადი, ხოლო $g_2(x)=(0,1+b)^x$ ზრდადი ფუნქციაა;

გ) $h_1(x)=(5-a)^x$ და $h_2(x)=(0,3+b)^x$ კლებადი ფუნქციებია.

15 მიუთითე a-ს რომელიმე მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $g(x)=(a+3)^x$ ფუნქცია: ა) კლებადია; ბ) ზრდადია; გ) მუდმივია.

16 გამოთვალე:

ა) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}}$; ბ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{12}}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}$;

გ) $\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{2\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; დ) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$.

17 ერთსა და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგე $y=2^x$ და $y=5^x$ ფუნქციათა გრაფიკები და და გააკეთე შედარებითი ანალიზი.

18 დაალაგე რიცხვები ზრდის მიხედვით:

$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\sqrt{7}}$; $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{44}}$; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4\sqrt{3}}$; 1; $\left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}$.

19 მოცემულია ფუნქციები: $f(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^x$ და $h(x)=\left(8-2\sqrt{15}\right)^x$. შეადარე:

ა) f(3) და h(2); ბ) f(–3) და f(–2);

გ) f(4) და f(2), დ) f(3) და 1, ე) h(–3) და 1.

20 იპოვე a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც:

ა) $f(x)=(a^2-3)^x$ ფუნქცია ზრდადია; ბ) $f(x)=(a^2-3)^x$ ფუნქცია კლებადია.

21 ამოხსენი განტოლება: $9^x-8\cdot3^x=9$.

შესაძლებელია თუ არა

ა) ნებისმიერი დადებითი რიცხვი წარმოვადგინოთ ხარისხის სახით 2-ის ფუძითა და რაციონალური მაჩვენებლით?

ბ) ნებისმიერი დადებითი რიცხვი წარმოვადგინოთ ხარისხის სახით 2-ის ფუძითა და ნამდვილი მაჩვენებლით?

5.3 მაჩვენებლიანი განტოლება

მიზანი

ლოგარითმის განმარტება და მაჩვენებლიანი განტოლების ამოსახსნელად გამოყენება

ცნობილია, რომ რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის პროცესი გამოისახება ტოლობით:

$$N(t)=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}, \qquad (1)$$

სადაც N_0 – ნივთიერების ელემენტთა საწყისი რაოდენობა, N(t) – t დროის შემდეგ ელემენტების დარჩენილი რაოდენობა, ხოლო T-ნივთიერების ნახევრად დაშლის პერიოდია (ე.ი. დრო, რომელიც ნივთიერების განახევრებას სჭირდება).

როგორც 1-ელი ტოლობა გვიჩვენებს, N(t) t-ცვლადის მაჩვენებლიანი ფუნქციაა. რაც შეეხება T პარამეტრს, იგი კონკრეტული ნივთიერებისთვის ფიქსირებული რიცხვია. მაგალითად, ურანის U_{238} იზოტოპისთვის $T=4{,}468\cdot 10^9$ წელს.

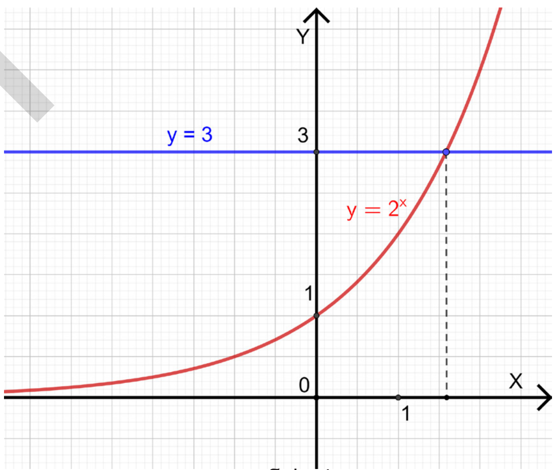
ამოცანა. შევძლებთ თუ არა, ზუსტად გავიგოთ, რა დროა საჭირო იმისათვის, რომ ნივთიერების რაოდენობა დაშლის პროცესით 3-ჯერ შემცირდეს.

ამოხსნა. ამოცანის პირობით $N_0:N(t)=3$, ამიტომ პირველი ტოლობა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$2^x=3, \qquad (2)$$

სადაც $x=\frac{t}{T}$ უცნობი სიდიდეა. მიღებული მე-2 ტოლობა **მაჩვენებლიანი განტოლებაა,** რადგან ამ განტოლებაში უცნობი სიდიდე ხარისხის მაჩვენებლია.

ამ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ავაგებთ $y=2^x$ და $y=3$ ფუნქციათა გრაფიკებს (ნახ. 1). ეს გრაფიკები ერთადერთ წერტილში გადაიკვეთება. ამ წერტილის აბსცისა იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნი.



ნახ. 1

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, მე-2 განტოლების ამონახსნი, დაახლოებით, 1,6-ის ტოლია, თუმცა ამონახსნის ზუსტი მნიშვნელობის გრაფიკული მეთოდით დადგენა შეუძლებელია. ეს ამონახსნი ირაციონალური რიცხვია. იგი $\log_2 3$ ჩანაწერით აღინიშნება (იკითხება ლოგარითმი 3-ისა 2-ის ფუძით). ე.ი. მე-2 განტოლების ამონახსნია $x=\log_2 3$, ანუ $\log_2 3$ – არის ის ხარისხის მაჩვენებელი, რომელში 2-ის ახარისხებითაც მიიღება 3: $2^{\log_2 3}=3$.

პასუხი. $t=T\cdot\log_2 3$.

მე-2 განტოლება $a^x=b$ მაჩვენებლიანი განტოლების კერძო შემთხვევაა. ამ შემთხვევაში უნდა მოვითხოვოთ, რომ a და b დადებითი რიცხვებია და ამასთან $a\neq 1$. ამ პირობებში ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობაში, ისევე როგორც მე-2 განტოლების შემთხვევაში, შესაბამისი გრაფიკების აგებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ.

$a^x=b$ განტოლების ამონახსნს $\log_a b$ ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „ლოგარითმი b რიცხვისა a-ს ფუძით“). მაშასადამე, $\log_a b$ ის ხარისხის მაჩვენებელია, რომელშიც a-ს ახარისხებით მიიღება b:

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (2)$$

მე-2 ტოლობას **ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა** ეწოდება.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ: ა) $\log_2 8$; ბ) $\log_7 \frac{1}{49}$; გ) $\log_{10}\sqrt{10}$; დ) $3^{\log_3 17}$.

ამოხსნა. ა) $\log_2 8=3$, რადგან $2^3=8$; ბ) $\log_7 \frac{1}{49}=-2$, რადგან $7^{-2}=\frac{1}{49}$;

გ) $\log_{10}\sqrt{10}=\frac{1}{2}$, რადგან $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$; დ) მე-2 ტოლობის თანახმად $3^{\log_3 17}=17$.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

ა) $1000^x=100$; ბ) $3^x=7$; გ) $32^x=\frac{1}{64}$; დ) $2^x=-4$

ამოხსნა. ა) განტოლების ორივე მხარე წარმოვადგინოთ 10-ის ფუძით: $10^{3x}=10^2$.

$$3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}.$$

ბ) $3^x=7 \Leftrightarrow x=\log_3 7.$

გ) $32^x=\frac{1}{64} \Rightarrow 2^{5x}=2^{-6} \Rightarrow x=-\frac{6}{5}.$

დ) $2^x=-4$ განტოლებას ამონასნი არ აქვს, რადგან $y=2^x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(0;+\infty)$.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება: ა) $\left(\sqrt[5]{27}\right)^{3x^2-5x-2}=1$; ბ) $3\cdot 5^{x-2}-5^x+550=0$.

ამოხსნა.

ა) მოცემული განტოლება დავწეროთ მისი ტოლფასი განტოლების სახით: $\left(\sqrt[5]{27}\right)^{3x^2-5x-2}=\left(\sqrt[5]{27}\right)^0 \Rightarrow 3x^2-5x-2=0.$

მიღებული კვაადრატული განტოლების ამონახსნებია: $x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{3}.$

ბ) მოცემულის ტოლფასი განტოლებაა: $3\cdot 5^{x-2}-25\cdot 5^{x-2}+550=0$, საიდანაც მიიღება:

$$5^{x-2}(3-25)=-550,$$
$$5^{x-2}=25,$$
$$5^{x-2}=5^2,$$
$$x-2=2,$$
$$x=4.$$

პასუხი: ა) $x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{3}$; ბ) $x=4$.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება: $9^x-3^x-2=0$.

ამოხსნა. ა) შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $3^x=y$, მაშინ $9^x=y^2$ და განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ $y^2-y-2=0$ კვადრატულ განტოლებას, რომლის ფესვებია $y_1=-1$, $y_2=2$. მიღებული ფესვების აღნიშვნაში ჩასმით გვექნება: $3^x=-1$ ან $3^x=2$. პირველ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს, ხოლო მეორის ამონახსნია $x=\log_3 2$.

პასუხი: $x=\log_3 2$.

უპასუხე კითხვებს:

1) როგორ განტოლებას ჰქვია მაჩვენებლიანი?
2) რატომაა, რომ მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნისას უნდა შესრულდეს პირობა: $a>0$, $a\neq 1$?
3) რატომ შემოვიღეთ ლოგარითმი?
4) a და b ცვლადების რა მნიშვნელობებისათვის განიმარტება $\log_a b$?
5) რა აღნიშვნის შემოტანით ამოხსნი $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$ სახის განტოლებას?
6) b-ს რა მნიშვნელობებისთვის არ აქვს ამონახსნი $7^x=b$ განტოლებას?
7) a-ს რა დადებითი მნიშვნელობისათვის არ აქვს ამონახსნი $a^x=2$ განტოლებას?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე:

ა) $\log_2 4$; ბ) $\log_3 27$; გ) $\log_2 64$; დ) $\log_4 64$; ე) $\log_5 125$;

ვ) $\log_{25} 5$; ზ) $\log_2 \frac{1}{8}$; თ) $\log_8 2$; ი) $\log_3 \frac{1}{9}$; კ) $\log_2 1$;

ლ) $\log_{10} 0{,}1$; მ) $\log_{0,1} 10$; ნ) $\log_2 4^{-3}$; ო) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; პ) $\log_{\frac{1}{3}} 9^2$;

ჟ) $\log_{0,1} 1$; რ) $\log_{10} 0{,}01$; ს) $\log_{0,01} 10$; ტ) $4^{\log_4 3}$; უ) $3^{\log_3 13}$;

ფ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5} 5}$; ქ) $9^{\log_3 5}$; ღ) $4^{\log_2 3}$; ყ) $3^{\log_2 8}$;

2 ისარგებლე პარაგრაფის 1-ელი ფორმულით და გაარკვიე, რა დროა საჭირო T ნახევარდაშლის პერიოდის მქონე რადიოაქტიური ნივთიერების: ა) 4-ჯერ , ბ) 5-ჯერ შესამცირებლად.

ამოხსენი განტოლება: №3-9

3 ა) $2^x=32$; ბ) $3^x=27$; გ) $9^x=27$; დ) $2^{3x}=\frac{1}{4}$;

ე) $4^x=64$; ვ) $3^x=81$; ზ) $25^{-x}=\frac{1}{5}$; თ) $8^x=16$;

ი) $4^x=25$; კ) $3^x=8$; ლ) $2^{-x}=0{,}2$; მ) $8^x=6$.

4

ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; ბ) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{27}$; გ) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^3-9x} = 1$; დ) $9^{6-x} = 3^{3x-2}$

ე) $29 - \frac{1}{5^x} = \frac{1}{4^{-1}}$; ვ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{2x-3} = \frac{27}{8}$; ზ) $64^x = \frac{1}{16}$; თ) $25^{3x} - \frac{1}{5} = 0.$

5

ა) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; ბ) $8^x = \sqrt[3]{32}$; გ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$. დ) $\sqrt{2^x \cdot 3^x} = 36$.

6

ა) $25^{\frac{2x-3}{4}} = \sqrt[4]{125}$; ბ) $\sqrt[5]{125^{3x+1}} = \frac{1}{625}$;

გ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{2x-3} \cdot \frac{27}{8} = \left(\frac{5}{9}\right)^0 - 3^{-1}$; დ) $\sqrt[5]{0,49^{3x+1}} = \frac{10}{7}$.

7

ა) $3^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 225$; ბ) $2^x \cdot 5^x = 10^{-1} \cdot \left(10^{2x-2}\right)^3$;

გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x-3} = 125$; დ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+6x+4} = 81$.

8

ა) $3^{x+1} + 15 \cdot 3^x = 6$; ბ) $7^{x+1} + 7^x = 56$; გ) $7^{x+1} + 7^x = 8$; დ) $5^x + 5^{x-2} = 130$.

ე) $2 \cdot 5^{x-2} + 3 \cdot 5^{x+1} = 377$; ვ) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-1} = 225$; ზ) $3 \cdot 9^{x-2} + 9 \cdot 3^{2x-5} = 18$.

9

ა) $9^x + 2 \cdot 3^x = 3$; ბ) $2^{2x} + 2^{x+2} = 96$;

გ) $4 \cdot 2^{2x} + 16 = 65 \cdot 2^x$; დ) $4^{x+1,5} + 2^{x+2} = 4$.

10

შევძლებთ თუ არა, ზუსტად გავიგოთ, რა დროა საჭირო იმისათვის, რომ ნივთიერების რაოდენობა დაშლის პროცესით შემცირდება: ა) 2-ჯერ? ბ) 4-ჯერ?

11

გამოთვალე:

ა) $\log_4 8$; ბ) $\log_9 27$; გ) $\log_{0,4} 6,25$;

დ) $2^{\log_4 9}$; ე) $3^{\log_9 16}$; ვ) $5^{\log_{0,5} 8}$.

12

ამოხსენი განტოლება:

ა) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{3x} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}$; ბ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x+4+2\sqrt{5}} = \left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}$;

გ) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$. დ) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$;

ე) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; ვ) $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$.

13

კატომ ბანკში 1000 ლარი იმ გადაწყვეტილებით შეიტანა, რომ დაგროვილ თანხას გაორკეცებამდე არ გამოიტანს. რამდენ წელს მოუწევს კატოს ლოდინი, თუ ყოველწლიურად თანხას 10% ა) მარტივი საპროცენტო დარიცხვით ემატება? ბ) რთული საპროცენტო დარიცხვით ემატება?

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №11

მაჩვენებლიანი ფუნქცია

1 მოცემული ფუნქციებიდან, რომელია მაჩვენებლიანი ფუნქცია?

ა) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; ბ) $y=x^{\frac{1}{2}}$; გ) $y=x^2$; დ) $y=x^n$.

2 $y=2^x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა:

ა) $(-\infty;+\infty)$; ; ბ) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; გ) $(0;1)$; დ) $(0;+\infty)$.

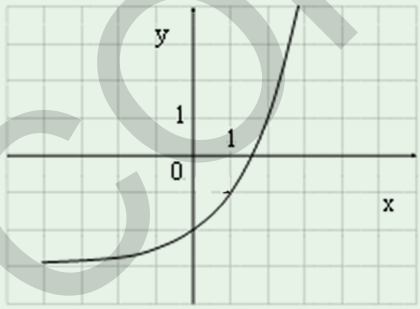
3 $y=3^x+2$ ფუნქციის გრაფიკი გადის წერტილზე, რომლის კოორდინატებია:

ა) (0; 1) ბ) (0; 3) ; გ) (3; 2); დ) (2; 3).

4 ქვემოთ მოცემული ფუნქციებიდან რომლის გრაფიკია გამოსახული ნახაზზე?

ა) $y=2^x-2$; ბ) $y=3^x-3$;

გ) $y=2^x-3$; დ) $y=4^x-2$.



5 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{2x}=1$ განტოლების ამონახსნია:

ა) 2; ბ) 3; გ) 0,2; დ) 0,3.

6 რომელი სამეულია ზრდის მიხედვით დალაგებული?

ა) $3^0,\ 3^{1,5},\ 3^{0,5}$; ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{0},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1,2}$;

გ) $3^{0,5};3^{1,5};3^0$; დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1,2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{0},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1,2}$.

7 იპოვე x არგუმენტის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობა 64-ის ტოლია, თუ ცნობილია, რომ $f(3)=\frac{1}{8}$.

ამოხსენი განტოლება №8-9:

8 $3^{x+2}-3^x=24$.

9 $10^x:5^x=3$;

10 დაადგინე $y=2^{\sin x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ $\log_2 3$ ირაციონალური რიცხვია.

5.4 ლოგარითმის თვისებები

მიზანი

- ნამრავლის, განაყოფისა და ხარისხის ლოგარითმის გამოსათვლელი ფორმულები;
- ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლის ფორმულა და მისი გამოყენება

ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ლოგარითმის თვისებები.

1) დადებითი თანამამრავლების ლოგარითმი თანამამრავლთა ლოგარითმების ჯამის ტოლია.

ანუ

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c. \qquad (1)$$

მაგალითად, $\log_2 10 = \log_2(2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$.

დამტკიცება. ძირითადი ლოგარითმული იგივეობის თანახმად

$b = a^{\log_a b}$ და $c = a^{\log_a c}$,

ამიტომ,

$$\log_a(bc) = \log_a\left(a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c}\right) = \log_a a^{\log_a b + \log_a c} = \log_a b + \log_a c.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შენიშვნა. თუ bc >0, მაშინ $\log_a(bc)$ არსებობს მაშინაც, როცა b<0 და c<0. ამ შემთხვევაში

$$\log_a(bc) = \log_a|b| + \log_a|c|.$$

2) ორი დადებითი რიცხვის განაყოფის ლოგარითმი გასაყოფისა და გამყოფის ლოგარითმების სხვაობის ტოლია.

ანუ

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \qquad (2)$$

მაგალითად, $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. მაშინ ლოგარითმის განმარტების თანახმად:

$$b = a^x, \quad c = a^y;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

შენიშვნა. თუ $\frac{b}{c} > 0, b < 0, c < 0$, მაშინ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a|b| - \log_a|c|$.

3) დადებითფუძიანი ხარისხის ლოგარითმი ხარისხის მაჩვენებლისა და ხარისხის ფუძის ლოგარითმის ნამრავლის ტოლია,

ანუ

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b, \qquad (3)$$

სადაც α-ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

მაგალითად, $\log_2 \sqrt[3]{21} = \log_2 21^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_2 21.$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\log_a b = \beta$, მაშინ ლოგარითმის განმარტების თანახმად $b = a^\beta$ და

$$\log_a b^\alpha = \log_a \left(a^\beta\right)^\alpha = \log_a a^{\alpha\beta} = \alpha\beta = \alpha \log_a b.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

დავამტკიცოთ კიდევ ერთი ტოლობა, რომელიც ლოგარითმის ფუძის სხვა ფუძით ჩანაცვლების საშუალებას იძლევა:

თუ a, b და c დადებითი რიცხვებია, ამასთან a≠1 და c≠1, მაშინ

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad (4)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\log_a b = \alpha$, მაშინ $b = a^\alpha$, ამიტომ

$$\log_c b = \log_c a^\alpha = \alpha \log_c a \Rightarrow \alpha = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

ანუ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

დამტკიცებული ფორმულა ლოგარითმის გამოსათვლელად კალკულატორის გამოყენების საშუალებას იძლევა. საქმე ისაა, რომ კალკულატორს მხოლოდ 10-ის ფუძიანი, ანუ ათობითი და e-ს ფუძიანი ლოგარითმის ღილაკები აქვს (e-ნეპერის რიცხვია, e≈2,7. e-ფუძიან ლოგარითმს ნატურალურ ლოგარითმს უწოდებენ). ათობით ლოგარითმს lg ჩანაწერით, ხოლო ნატურალურ ლოგარითმს ln ჩანაწერით აღნიშნავენ. ასე რომ, 10-ისა და e-სგან განსხვავებული ფუძის მქონე ლოგარითმის გამოსათვლელად მოცემული ლოგარითმი ამ ორი ფუძიდან ერთ-ერთზე უნდა დავიყვანოთ.

მაგალითად, კალკულატორით გამოვთვალოთ $\log_2 3$. მე-4 ფორმულით

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}5849625.$$

თუ მე-4 ფორმულაში დავუშვებთ, რომ c=b, მივიღებთ:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \qquad (5)$$

მაგალითად, $\log_{27} 3 = \frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{3}.$

მე-5 ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა (დაამტკიცე დამოუკიდებლად):

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b, \qquad (6)$$

სადაც α ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია.

მაგალითად, $\log_8 4 = \log_{2^3} 4 = \frac{1}{3}\log_2 4 = \frac{2}{3}.$

თუ მე-3 და მე-6 ფორმულებს გავაერთიანებთ, მივიღებთ კიდევ ერთ ფორმულას:

$$\log_{a^{\alpha}} b^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}\log_a b. \qquad (7)$$

მაგალითად, $\log_{32} 64 = \log_{2^5} 2^6 = \frac{6}{5}\log_2 2 = 1,2.$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ: ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{6}{\log_5 3} - \log_9 625}$; ბ) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10.$

ამოხსნა. ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{6}{\log_5 3} - \log_9 625} = \left(3^{-1}\right)^{6\log_3 5 - \frac{4}{2}\log_3 5} = 3^{-4\log_3 5} = 3^{\log_3 5^{-4}} = 5^{-4} = 0,0016.$

ბ) თანამამრავლები წარმოვადგინოთ 10-ის ფუძით და ჩავსვათ გამოსათვლელ გამოსახულებაში: $\log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3}$, $\log_4 3 = \frac{\lg 3}{\lg 4}$, . . ., $\log_{11} 10 = \frac{\lg 10}{\lg 11}$,

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10 = \frac{\lg 2}{\cancel{\lg 3}} \cdot \frac{\cancel{\lg 3}}{\cancel{\lg 4}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{\lg 9}}{\cancel{\lg 10}} \cdot \frac{\cancel{\lg 10}}{\lg 11} = \frac{\lg 2}{\lg 11} = \lg_{11} 2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ: $\log_3 45$, თუ $\log_5 3 = a.$

ამოხსნა. $\log_3 45 = \log_3 9 + \log_3 5 = 2 + \frac{1}{\log_5 3} = 2 + \frac{1}{a} = \frac{2a+1}{a}.$

უპასუხე კითხვებს:

1) რას უდრის ნამრავლის ლოგარითმი?
2) რას უდრის წილადის ლოგარითმი?
3) რას უდრის ხარისხის ლოგარითმი?
4) როგორ გამოთვლი $\log_3 5$-ს კალკულატორით?
5) როგორი შეიძლება იყოს a, b, α და β მე-7 ფორმულაში?

სავარჯიშოები

1 წარმოადგინე ჯამის ან სხვაობის სახით:

ა) $\log_2(8 \cdot 7)$; ბ) $\log_3(2 \cdot 27)$; გ) $\log_7 21$; დ) $\log_4 20$; ე) $\log_4 16a$;

ვ) $\log_3 81ab$; ზ) $\log_2 \frac{7}{11}$; თ) $\log_3 \frac{3}{20}$; ი) $\log_7 \frac{21}{25}$; კ) $\log_5 \frac{a}{5}$;

ლ) $\log_3 \frac{9}{b}$; მ) $\log_5 \frac{5a}{b}$.

გამოთვალე: №2-10

2 ა) $\log_3 4,5 + \log_3 2$; ბ) $\log_2 3,2 + \log_2 10$; გ) $\log_5 10 - \log_5 2$; დ) $\log_{15} 2250 - \log_{15} 10$.

ე) $\log_5 0,1 + \log_5 10$; ვ) $\log_3 42 - \log_3 14$; ზ) $\log_3 10 - \log_3 30$; თ) $\log_2 5 - \log_2 10$.

3 ა) $5^{1+\log_5 10}$; ბ) $5^{1-\log_5 10}$; გ) $8^{\log_8 6-\log_8 3}$; დ) $12^{\log_{12} 24-\log_{12} 2}$;

ე) $16^{\log_4 7}$; ვ) $9^{\log_3 4}$; ზ) $5^{\log_3 2,25+\log_3 4}$.

4 ა) $\log_3 3^{17}$; ბ) $\log_2 4^{12}$; გ) $2\log_4 6-\log_4 9$;

დ) $3\log_2 10-\log_2 20^3$; ე) $5\log_8 4-\log_8 16$.

5 ა) $36^{\log_6 2}$; ბ) $81^{\log_9 7}$; გ) $\log_8 \sqrt[5]{16}$;

დ) $\log_{125} \dfrac{25}{\sqrt[3]{5}}$; ე) $\log_{100} 0,01$; ვ) $\log_{\sqrt{10}} \sqrt[3]{0,1}$.

6 ა) $\lg 100$; ბ) $\lg 10000$; გ) $\lg 0,001$;

დ) $100^{\lg 5}$; ე) $\left(\sqrt{10}\right)^{\lg 16}$; ვ) $\left(\sqrt[3]{100}\right)^{\lg 8}$.

7 ა) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{2}+\log_3 \dfrac{1}{2}$; ბ) $\log_{2\sqrt{3}} 2+\log_{12} 3$;

გ) $\log_5 0,2-\log_{0,5} 4$; დ) $\log_5 \dfrac{1}{7}-\log_{\sqrt{5}} \dfrac{5}{\sqrt{7}}$.

8 ა) $\dfrac{\lg 32}{\lg 2}$; ბ) $\dfrac{\log_5 64}{\log_5 48-\log_5 3}$; გ) $\log_5 9\cdot\log_3 5$;

დ) $\log_2 3\cdot\log_9 16$; ე) $\log_4 7\cdot\log_{49} 16$.

9 ა) $5^{2\log_{25} 8+2\log_{0,2} 5}$; ბ) $25^{\frac{1}{2}\log_5 7+\log_{25} 2}$;

გ) $\dfrac{\log_5 169}{\log_{125} 13}$; დ) $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

10 ა) $\log_{3\sqrt{3}} \dfrac{1}{27}$; ბ) $\log_{0,05} 0,0025$;

გ) $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$; დ) $\log_{3\sqrt{3}} \dfrac{1}{3}$.

11 გამოთვალე მეათასედამდე სიზუსტით კალკულატორის დახმარებით:

ა) $\lg 3-\lg 2$; ბ) $\log_3 5+\log_3 4$;

გ) $\log_2 12-\log_2 11$; დ) $\log_5 7+\log_3 2$.

12 გაამარტივე $\log_4(1-\sin x)+\log_4(1+\sin x)$ გამოსახულება და იპოვე მისი მნიშვნელობა, როცა: ა) $x=\dfrac{\pi}{4}$; ბ) $x=\dfrac{\pi}{3}$; გ) $x=\pi$.

13 გაამარტივე $\log_{\frac{4}{3}}(1-\cos x)+\log_{\frac{4}{3}}(1+\cos x)$ გამოსახულება და იპოვე მისი მნიშვნელობა, როცა: ა) $x=\dfrac{\pi}{2}$; ბ) $x=\dfrac{\pi}{3}$; გ) $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

14 გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $10^{1+\lg 19} \cdot \log_3 7 \cdot \log_{49} 9$;   ბ) $9^{\log_3 4+0,5} + \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$.

15 იპოვე $\log_3 6$, თუ ცნობილია, რომ $\log_3 2 = a$.

16 იპოვე $\log_5 12$, თუ ცნობილია, რომ $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

17 გამოთვალე $\log_{\sqrt{3}} 8$, თუ ცნობილია, რომ $\log_2 3 = a$.

18 იპოვე $\log_8 \sqrt[3]{0,75}$, თუ ცნობილია, რომ $\log_2 3 = a$.

19 გამოთვალე:

ა) $\sqrt{\log_2 9 \cdot \log_3 16 + 3^{\log_6 8} \cdot 2^{\log_6 8}}$;   ბ) $4^{0,5\log_2 3+1} + 100^{\log_9 3+\frac{1}{2\log_5 10}} + \log_3 64 \cdot \log_4 3$;

გ) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{4}\lg 16} + 25\log_3 \sqrt[3]{5} \cdot \log_5 27}$;   დ) $\sqrt{3^{1-\log_9 4} + 5^{2\log_{125} 8} - \log_9 27}$.

20 გამოთვალე $\lg 56$, თუ $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

21 ღვინის გასაფილტრად იყენებენ ფილტრს, რომელიც ღვინოში არსებულ შენარევებს 20%-ით ამცირებს. სულ მცირე, რამდენი ფილტრია საჭირო, რათა შენარევების რაოდენობა 4-ჯერ შემცირდეს?

22 არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_7=5$, ხოლო $a_9=11$. იპოვე პროგრესიის სხვაობა და პირველი წევრი.

23 გეომეტრიულ პროგრესიაში $b_3=4$, ხოლო $b_6=32$. იპოვე პროგრესიის მნიშვნელი და პირველი წევრი.

აბა, სცადე!

იპოვე შეცდომა ქვემოთ მოყვანილ მსჯელობაში:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}.$$

უკანასკნელი უტოლობის საერთო მამრავლზე შეკვეცით ვიღებთ: 2>3.

5.5 გალოგარითმება და პოტენცირება

მიზანი ალგებრული გამოსახულების გალოგარითმება და პოტენცირება

ამოცანა. დავამტკიცოთ, რომ თუ (b_n) მიმდევრობა დადებითი რიცხვებისგან შედგენილი გეომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ $(\lg b_n)$ იქნება არითმეტიკული პროგრესია.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ გეომეტრიული პროგრესიის n-ური წევრის ფორმულით:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}.$$

თუ მოცემული ტოლობის ორივე მხარეს **გავალოგარითმებთ,** ანუ ორივე მხარეს მივუწერთ $\lg$-ს და გამოვიყენებთ ნამრავლისა და ხარისხის ლოგარითმის თვისებებს, მივიღებთ:

$$\lg b_n = \lg\left(b_1q^{n-1}\right) = \lg b_1 + (n-1)\lg q.$$

მიღებული ტოლობა წარმოადგენს იმ არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრის ფორმულას, რომლის პირველი წევრია $\lg b_1$, ხოლო სხვაობა $\lg q$. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მაგალითი 1. გავალოგარითმოთ გამოსახულება და გარდავქმნათ ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით:

ა) $5bc$; ბ) $\frac{a}{bc}$; გ) b^2c^3; დ) $\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3c}}$.

ამოხსნა. ა) $\log_2(5bc)=\log_2 5+\log_2 b+\log_2 c$;

ბ) $\log_3\frac{a}{bc}=\log_3 a-\log_3(bc)=\log_3 a-\log_3 b-\log_3 c$;

გ) $\log_4\left(b^2c^3\right)=\log_4 b^2+\log_4 c^3=2\log_4 b+3\log_4 c$;

დ) $\log_5\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3c}}=\frac{1}{5}\log_5\frac{a^2}{b^3c}=\frac{1}{5}\left(\log_5 a^2-\log_5\left(b^3c\right)\right)=\frac{1}{5}\left(2\log_5 a-\left(3\log_5 b+\log_5 c\right)\right)=$

$=\frac{2}{5}\log_5 a-\frac{3}{5}\log b_5-\frac{1}{5}\log_5 c.$

გალოგარითმების შებრუნებული მოქმედებაა **პოტენცირება.** თუ გალოგარითმებით $a=b$ ტოლობიდან, სადაც $a>0$, $b>0$, მიიღება $\log a=\log b$ ტოლობა, პოტენცირებისას პირიქით, $\log a=\log b$ ტოლობიდან ვღებულობთ $a=b$ ტოლობას.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ x, თუ:

ა) $\log_a x=3\log_a c-\frac{1}{3}\log_a d$; ბ) $\log_a x=\log_a b-\frac{1}{m}\log_a(b-c)+m\log_a(b+c)$.

ამოხსნა. ა) $\log_a x=3\log_a c-\frac{1}{4}\log_a d=\log_a c^3-\log_a\sqrt[4]{d}=\log_a\frac{c^3}{\sqrt[4]{d}}$. მივიღეთ, რომ

$\log_a x=\log_a\frac{c^3}{\sqrt[4]{d}}$. ამ ტოლობის პოტენცირებით მივიღებთ $x=\frac{c^3}{\sqrt[4]{d}}$.

ბ) $\log_a x=\log_a b-\frac{1}{m}\log_a(b-c)+m\log_a(b+c)=\log_a b+\log_a(b-c)^{-\frac{1}{m}}+\log_a(b+c)^m=$

$$=\log_a\left[b(b-c)^{-\frac{1}{m}}(b+c)^m\right]\Rightarrow x=\frac{b(b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}}.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ x, თუ $\lg x=2\lg a-5\lg b+\frac{3}{7}\lg c,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$

ამოხსნა. $\lg x=2\lg a-5\lg b+\frac{3}{7}\lg c=\lg a^2-\lg b^5+\lg c^{\frac{3}{7}}=\lg\left(\frac{a^2\cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5}\right).$

პოტენცირებით მივიღებთ: $x=\frac{a^2\cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5}.$

უპასუხე კითხვებს:

1) რას ნიშნავს გალოგარითმება?
2) რა მოქმედებაა პოტენცირება?
3) რა მიმდევრობა მიიღება დადებითწევრებიანი გეომეტრიული პროგრესიის გალოგარითმებით?

სავარჯიშოები

1 გაალოგარითმე გამოსახულება და გარდაქმენი ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით:

ა) $6ab$; ბ) $6(a+b)$; გ) $2a(a+b)$;

დ) $5(a^2+b^2)$; ე) $an(m+n)$; ვ) $2a\sin\alpha$.

2 გაალოგარითმე 10-ის ფუძით და გარდაქმენი ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით:

ა) $\frac{3ab}{c}$; ბ) $\frac{2mn}{3ac}$; გ) $\frac{a^3b^2}{c^4}$; დ) $\frac{a+b}{c-b}$;

ე) $\frac{4(a+b)}{3(a^2-b^2)}$; ვ) $\frac{2\pi R}{T}$; ზ) $m^2n^2\sqrt[5]{(a-b)^4}$; თ) $c=2\pi R$.

3 გაალოგარითმე:

ა) $\frac{4\pi R^3}{3}$; ბ) $a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}\beta$; გ) $\frac{4\sqrt{a^{-1}}\sqrt[3]{b}}{(a-b)^{-1}}$;

დ) $2a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a^2b^2}$; ე) $\left(\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{5c}}\right)^5$; ვ) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{ab}$;

ზ) $5a\sqrt[3]{a^4(a-c)^2}$; თ) $\frac{4}{3}R^3\cos^2\alpha\sqrt[3]{\sin^2\alpha}$.

4 b_n გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრია 10, ხოლო მნიშვნელი 0,1. იპოვე ამ პროგრესიის 10-ის ფუძით გალოგარითმებით მიღებული არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა.

5 მოცემულია $b_n=3^n$ მიმდევრობა. იპოვე $\log_3 b_n$ მიმდევრობის პირველი 10 წევრის ჯამი.

6 მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია: 2, 1, 0,5, 0,25 . . . 2^{-11}. გაალოგარითმე ამ პროგრესიის ყოველი წევრი 2-ის ფუძით და იპოვე მიღებული მიმდევრობის წევრთა ჯამი.

7 იპოვე x, თუ:

ა) $\lg x = 3\lg a + \lg 6$; ბ) $\lg x = 2\lg a - 3\lg c + 4\lg k$; გ) $\lg x = 4\lg a + 5\lg b$;

დ) $\lg x = \lg a - 4\lg c$; ე) $\lg x = 3\lg a - 4\lg b$; ვ) $\lg x = 3\lg(a+c) - 0,5\lg(a-c)$.

8 იპოვე x, თუ:

ა) $\lg x = \frac{2}{3}\lg a + 1,5\lg c$; ბ) $\lg x = \frac{2}{3}(\lg a - \lg c) - \lg(a-c)$;

გ) $\lg x = \frac{2}{3}(\lg a + \lg c)$; დ) $\log_a x = 3\log_a a + 4\log_a b - 5\log_a c$.

9 იპოვე x მისი ლოგარითმის მიხედვით:

ა) $\lg x = \frac{2}{3}\lg m - \frac{3}{5}\lg n$; ბ) $\log_a x = 2\log_a(m+n) - 3\log_a(m-n)$;

გ) $\lg x = \frac{2}{3}\lg m + \frac{3}{5}\lg n$; დ) $\log_a x = \frac{2}{3}\log_a(m-n) - \frac{1}{2}\log_a(m+n)$.

10 იპოვე x მისი ლოგარითმის მიხედვით:

ა) $\log_c x = \frac{1}{2}\log_c(a+b) - \frac{2}{3}\log_c(a-b) - \frac{3}{4}\log_c a$;

ბ) $\log_c x = \frac{2}{3}\log_c(a-b) - \frac{3}{4}(2\log_c a + 3\log_c a)$.

11 დაამტკიცე იგივეობა: $a^{\lg b} = b^{\lg a}$, სადაც $a>0$, $b>0$.

12 იპოვე x, თუ: ა) $\lg^2 x = 1$; ბ) $\log_5 \operatorname{tg} x = 0$; გ) $\log_2 \log_3 x = 2$;

13 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $x^2-9>0$; ბ) $16-x^2>0$; გ) $x(x-5)<0$; დ) $x^2-8x+15>0$; ე) $x(x-1)(x-2)<0$.

14 აჩვენე, რომ :

ა) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$; ბ) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{1}{3}$.

აბა, სცადე!

გამოთვალე $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

5.6 ლოგარითმული ფუნქცია და მისი გრაფიკი

მიზანი

ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკის აგება და თვისებების ჩამოყალიბება.

$y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის განმარტებაში x დამოუკიდებელი ცვლადი, ანუ არგუმენტი, ხოლო y ცვლადი – x-ზე დამოკიდებული ცვლადი, ანუ x არგუმენტის ფუნქციაა. თუ $y=a^x$ ტოლობაში, პირიქით, y-ს მივიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადად, მაშინ x იქნება y-ის ფუნქცია. კერძოდ, x იქნება y-ის ლოგარითმული ფუნქცია, რაც ასე ჩაიწერება:

$$x = \log_a y. \qquad (1)$$

თუ დამოუკიდებელ ცვლადს ტრადიციის გათვალისწინებით ისევ x-ით, ხოლო ფუნქციას y-ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ ლოგარითმული ფუნქციის სტანდარტულ ჩანაწერს:

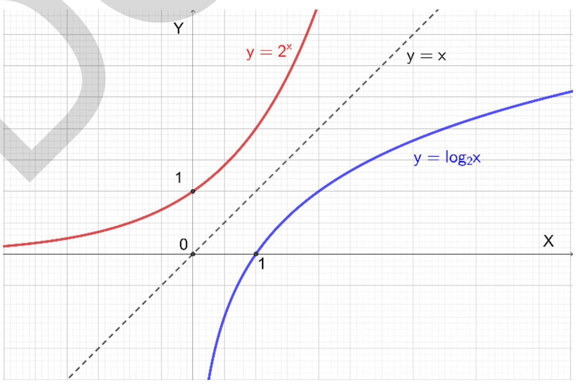
$$y = \log_a x, \qquad (2)$$

სადაც a ფუძე დადებითი და 1-ისგან განსხვავებული მოცემული რიცხვი, ხოლო x არგუმენტი ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ე.ი. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(0; +\infty)$ შუალედი. იმის გამო, რომ $\log_a x$ განმარტების თანახმად, ხარისხის მაჩვენებელია, ხოლო ხარისხის მაჩვენებელი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის ტოლი შეიძლება იყოს, $y = \log_a x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ $(-\infty; +\infty)$.

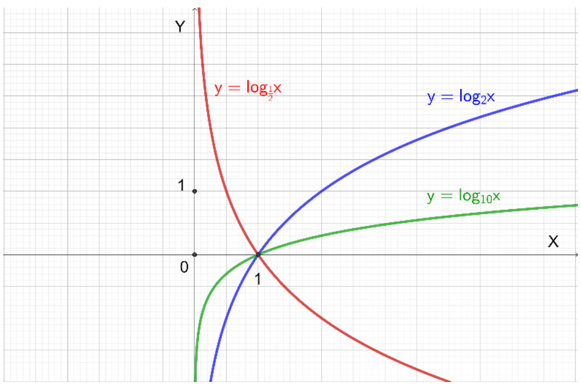
მაშასადამე: $\log_a : (0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$.

ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად შევნიშნოთ, რომ თუ (c;d) კოორდინატების მქონე წერტილი $y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილია, მაშინ (d;c) კოორდინატების მქონე წერტილი იქნება $y=a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის წერტილი და, პირიქით. მართლაც, (c; d) კოორდინატების მქონე წერტილი $y = \log_a x$ გრაფიკის წერტილია, ნიშნავს $d = \log_a c$ ტოლობას. ეს ტოლობა კი ტოლფასია $a^d = c$ ტოლობის, ანუ $(d;c) = (d;a^d)$ ე.ი. (d;c) არის $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარე წერტილის კოორდინატები.

საკოორდინატო სიბრტყეზე (c;d) და (d;c) კოორდინატების მქონე წერტილები ღერძულად სიმეტრიული წერტილებია y=x წრფის მიმართ. ამიტომ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი იმავე ფუძის მქონე მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის y=x წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიით მიიღება. 1-ელ ნახაზზე ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზეა მოცემული $y=2^x$ და $y = \log_2 x$ ფუნქციათა გრაფიკები, ხოლო მე-2 ნახაზზე – $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_2 x$ და $y = \log_{10} x$ ფუნქციათა გრაფიკები.



ნახ.1



ნახ.2

მიღებულ გრაფიკებზე დაყრდნობით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ $y=\log_a x$ ფუნქციის თვისებები:

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(0;+\infty)$;

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty;+\infty)$

3. თუ $a>1$, მაშინ ფუნქცია ზრდადია;

4. თუ $0<a<1$, მაშინ ფუნქცია კლებადია;

5. გრაფიკი ორდინატთა ღერძს არ კვეთს, ხოლო აბსცისათა ღერძს კვეთს (1;0) წერტილში.

ჩამოყალიბებულ თვისებებზე დაყრდნობით ამოვხსნათ რამდენიმე სავარჯიშო:

N1. ვიპოვოთ $f(x)=\log_a(x^2-7x+10)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. იმის გამო, რომ $f(x)=\log_a x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(0;+\infty)$, უნდა მოვითხოვოთ, რომ $x^2-7x+10>0$. კვადრატული სამწევრის ფესვებია 2 და 5, ამიტომ მოცემული უტოლობის ამონახსნია $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

პასუხი: $D_f=(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

N 2. რომელია მეტი: ა) $\log_5 2$ თუ $\log_5 3$? ბ) $\log_{\frac{1}{2}} 0,4$ თუ $\log_3 0,9$?

ამოხსნა. ა) $5>1$, ამიტომ $y=\log_5 x$ ზრდადი ფუნქცია, ე.ი. დიდ არგუმენტს ფუნქციის დიდი მნიშვნელობა შეესაბამება და რადგან $3>2$, ამიტომ $\log_5 3>\log_5 2$.

ბ) $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკზე დაკვირვებით ვასკვნით, რომ თუ $a>1$ და $x>1$ ან $0<a<1$ და $0<x<1$, მაშინ $\log_a x>0$, ხოლო თუ $a>1$და $0<x<1$ ან $0<a<1$ და $x>1$, მაშინ $\log_a x<0$. აქედან გამომდინარე, $\log_{\frac{1}{2}} 0,4>0$, ხოლო $\log_3 0,9<0$. ე.ი. $\log_{\frac{1}{2}} 0,4>\log_3 0,9$.

პასუხი. ა) $\log_5 3>\log_5 2$; ბ) $\log_{\frac{1}{2}} 0,4>\log_3 0,9$.

N 3. გამოვთვალოთ $\log_a 8$, თუ წერტილი კოორდინატებით (0,25;2) ეკუთვნის $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკს.

ამოხსნა. პირობის თანახმად $\log_a 0,25=2 \Leftrightarrow a^2=0,25 \Leftrightarrow a=\pm 0,5$, ამასთან $a>0$, ამიტომ $a=0,5$. $\log_{0,5} 8=-\log_2 8=-3$.

პასუხი. -3.

უპასუხე კითხვებს:

1) რას ეწოდება ლოგარითმული ფუნქცია?
2) რა სიმრავლეა ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
3) რა წერტილში კვეთს ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი აბსცისათა ღერძს?
4) რა შემთხვევაშია $y = \log_a x$ ლოგარითმული ფუნქცია ზრდადი? კლებადი?
5) რა კავშირია $y = \log_a x$ და $y=a^x$ ფუნქციათა გრაფიკებს შორის?
6) რა არის $y = \log_2 x$ ფუნქციის დადებითობის შუალედი?
7) რამდენი ნული აქვს ლოგარითმულ ფუნქციას?

სავარჯიშოები

1 ჩაწერე a,b და c რიცხვებს შორის დამოკიდებულება ლოგარითმის გამოყენებით, თუ:

ა) $b^a = c$; ბ) $a^b = c$; გ) $a^c = b$;

დ) $b^c = a$; ე) $c^b = a$; ვ) $c^a = b$.

2 ჩაწერე a, b და c რიცხვებს შორის დამოკიდებულება ხარისხის გამოყენებით, თუ:

ა) $\log_a b = c$; ბ) $\log_a c = b$; გ) $\log_b a = c$;

დ) $\log_b c = a$; ე) $\log_c b = a$; ვ) $\log_c a = b$.

3 რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია ფუნქციას:

ა) $y = \log_2^2 x$? ბ) $y = -\log_2^3 x$? გ) $y = -2 + \log_{0,5}^2 x$?

4 რომელიმე კომპიუტერული პროგრამის გამოყენებით ერთ საკოორდინატო სიბრტყეში ააგე:

ა) $y = 3^x$, $y = \log_3 x$ და $y=x$ ფუნქციათა გრაფიკები;

ბ) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ და $y=x$ ფუნქციათა გრაფიკები.

5 რომელია მეტი:

ა) $\log_3 12$ თუ $\log_3 15$? ბ) $\log_{\frac{1}{3}} 12$ თუ $\log_{\frac{1}{3}} 15$?

გ) $\lg 2$ თუ $\lg 3$? დ) $\lg_{0,1} 5$ თუ $\lg_{0,1} 6$?

6 შეადარე მოცემული რიცხვები ნულს:

ა) $\log_2 1,2$; ბ) $\log_3 0,5$; გ) $\log_{\frac{1}{3}} 0,3$; დ) $\log_{\frac{1}{3}} 5$;

ე) $\lg 2$; ვ) $\lg 3$; ზ) $\lg_{0,1} 1$; თ) $\lg_{0,1} 2$.

7 შეადარე სიდიდის მიხედვით a და b, თუ:

ა) $\log_{0,6} a < \log_{0,6} b$; ბ) $\log_{4,3} a > \log_{4,3} b$;

გ) $\log_{0,6}\frac{1}{a}<\log_{0,6}\frac{1}{b}$; დ) $\log_{4,3}\frac{1}{a}>\log_{4,3}\frac{1}{b}$.

8 იპოვე ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\lg(x+2)$; ბ) $y=\lg x^2$; გ) $y=2\lg x$;

დ) $y=\lg(x(x+1))$; ე) $y=\lg x+\lg(x+1)$.

9 დაალაგე მოცემული რიცხვები ზრდის მიხედვით: $\lg 3$, $\lg 7$, $\lg 0{,}01$, $\log_3 1$, $\log_{0,2} 5$.

10 დაალაგე მოცემული რიცხვები კლებადობის მიხედვით: $\log_2 3$, $\log_2 5$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{7}$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{9}$, $\log_4 8$.

11 რომელია მეტი:

ა) $\log_7 6$ თუ $\log_6 7$? ბ) $\log_{0,4} 0{,}5$ თუ $\lg\sin\frac{\pi}{7}$?

გ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(\sqrt{3}-1)}$ თუ 1? დ) $3^{\lg(\sin^4 x+\cos^4 x)}$ თუ 1?

12 იპოვე ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\lg(4-x^2)+\lg(x^2-1)$; ბ) $y=\dfrac{1}{\log_2(x^2-3x+2)}$;

გ) $y=\sqrt{5-x}+\log_{0,3}(x^2-6x+8)$.

13 გამოთვალე:

ა) $8^{\log_4 3}$; ბ) $343^{1-\log_{49}13}$;

გ) $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$; დ) $\log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}-1)$.

5.7 ლოგარითმული განტოლება

მიზანი

ლოგარითმული განტოლების ამოხსნის მეთოდების გაცნობა

ლოგარითმული ეწოდება განტოლებას, რომელშიც უცნობი შედის ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ. უმარტივესი ლოგარითმული განტოლებაა

$$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1. \qquad (1)$$

იმის გამო, რომ $y = \log_a x$ მონოტონური ფუნქციაა და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty;+\infty)$, 1-ელ განტოლებას ნებისმიერი b რიცხვისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x=a^b$.

უფრო ზოგადია განტოლება,

$$\log_a f(x) = b,\ a > 0,\ a \neq 1, \qquad (2)$$

სადაც $f(x)$ უცნობის შემცველი გამოსახულებაა. ეს განტოლება ლოგარითმის განმარტებიდან გამომდინარე, $f(x)=a^b$ განტოლების ტოლფასია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება: $\log_3(x^2 - 7x + 21) = 2$.

ამოხსნა. ლოგარითმის განსაზღვრების თანახმად $x^2 - 7x + 21 = 3^2 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 4$.

პასუხი: 3, 4.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (3)$$

სახის ლოგარითმული განტოლების პოტენცირებით მიიღება $f(x)=g(x)$ განტოლება, მაგრამ ამავე დროს უნდა გავითვალისწინოთ ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არე, ანუ მოვითხოვოთ ლოგარითმისქვეშა გამოსახულებების დადებითობა. იმის გამო, რომ $f(x)=g(x)$ საკმარისია დადებითობა მოვთხოვოთ $f(x)$ და $g(x)$ გამოსახულებებიდან ერთ-ერთს. ასე რომ, (3) განტოლება შემდეგი სისტემის ტოლფასია:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება: $\lg(x^2 - 6x + 8) = \lg(x - 2)$.

ამოხსნა: $\lg(x^2 - 6x + 8) = \lg(x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 5, \\ x > 2. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$

პასუხი: 5.

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a k(x),\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (4)$$

სახის განტოლებიდან, მარცხენა მხარის შეერთებითა და პოტენცირებით მიიღება $f(x)\cdot g(x)=k(x)$ განტოლება, მაგრამ იმის გამო, რომ $f(x)$ და $g(x)$ თავდაპირველ განტოლებაში ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ ცალ-ცალკე მონაწილეობენ, დადებითობა ორივეს უნდა მოვთხოვოთ. ასე რომ, მე-4 განტოლება შემდეგი სისტემის ტოლფასია:

$$\begin{cases} f(x) \cdot g(x) = k(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება: $\lg x+\lg(2x-19)=\lg(3x-20)$.

ამოხსნა.

$$\lg x+\lg(2x-19)=\lg(3x-20)\Leftrightarrow\begin{cases}x(2x-19)=3x-20,\\ x>0,\\ 2x-19>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=10, x_2=1,\\ x>9,5.\end{cases}\Leftrightarrow x=10.$$

პასუხი. x=10.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება: ა) $(\lg x-5)\lg x^3+18=0$; ბ) $\log_5\log_4\log_3 x=0$.

ამოხსნა. ა) ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა $x>0$. ვინაიდან $\lg x^3=3\lg x$, ამიტომ ვწერთ: $3(\lg x-5)\lg x+18=0$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\lg x=t$, გვექნება:

$$(t-5)3t+18=0$$

$$t^2-5t+6=0,$$

$$t_1=2, t_2=3.$$

$$\lg x=2 \text{ ან } \lg x=3,$$

$$x_1=100,\ x_2=1000.$$

პასუხი: 100, 1000.

ბ) მოცემული განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $\log_5(\log_4(\log_3 x))=0$, თანმიმდევრობით მოვხსნათ ლოგარითმები:

$$\log_4(\log_3 x)=1.$$

$$\log_3 x=4$$

$$x=3^4=81.$$

პასუხი. ა)100, 1000; ბ) 81.

დროის დაზოგვის მიზნით შეგვიძლია თავიდანვე არ ვიზრუნოთ განტოლებაში ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეზე, ჯერ ამოვხსნათ პოტენცირების შედეგად მიღებული განტოლება და შემდეგ თავიდან მოცემულ განტოლებაში ჩასმით შევამოწმოთ მიღებული ამონახსნები.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება: $\lg(2x^2-15x+10)=\lg(x^2-5x+1)$.

ამოხსნა. პოტენცირებით მივიღებთ:

$$2x^2-15x+10=x^2-5x+1,$$

$$x^2-10x+9=0,$$

$$x_1=9,\ x_2=1.$$

შემოწმება: $9^2-5\cdot9+1=37>0$, $1^2-5+1=-3<0$, ე.ი. 1 გარეშე ფესვია.

პასუხი. 9.

უპასუხე კითხვებს:

1) რას ეწოდება ლოგარითმული განტოლება?
2) რა არის ლოგარითმული განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე?
3) როგორ განტოლებებს ეწოდება ტოლფასი?

სავარჯიშოები

1 ამოხსენი განტოლება:

ა) $\log_2 x = -4$; ბ) $\log_3 x^2 = 4$; გ) $\log_4(x+1) = 2$; დ) $\log_{\sqrt[4]{4}}(x-1) = 8$;

ე) $\log_2(x+5) = 2$; ვ) $\log_2 x^2 = 0$; ზ) $\log_3(x^3+1) = 2$; თ) $\lg(x^2+19) = 2$.

2 ტოლფასია თუ არა განტოლებები:

ა) $\log_2(x^2-2) = \log_2 x$ და $x^2-2 = x$? ბ) $\lg x^2 = 0$ და $2\lg x = 0$?

გ) $\log_2(x(x-1)) = 1$ და $x(x-1) = 2$?

დ) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$ და $\log_3(x^2-1) = 1$?

ე) $x^2 = x+6$ და $x^2 + \log_2(2x+3) = x+6+\log_2(2x+3)$?

ამოხსენი განტოლება №3-9:

3 ა) $\log_4(5x-2) = \log_4 x$; ბ) $\lg x^3 = 5\lg x$; გ) $\lg(x^2+6) = \lg(5x)$;

დ) $\lg(x^2+7) = \lg(8x)$; ე) $\log_7 x = \log_7 12 + \log_7 3$;

ვ) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$; ზ) $\log_3 x = \log_3 0,5 + 2\log_3 8$.

4 ა) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg 3$; ბ) $\lg(2x-5) - \lg(x+2) = \lg(x-2)$;

გ) $\lg x^2 + \lg(8x) = 2\lg x + 1$; დ) $\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24)$.

5 ა) $\log_2(x^2+4x+3) = 3$; ბ) $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$;

გ) $\lg(x^2-6x+7) = \lg(x-3)$; დ) $\log_2(x-1) + \log_2 x = 1$.

6 ა) $\lg(4x) = 2\lg(x+1)$; ბ) $\log_3(x^2-4x-5) = \log_3(7-3x)$;

გ) $\lg(x-6) - 0,5\lg 2 = \lg 3 + \lg\sqrt{x-10}$; დ) $2\log_3 \dfrac{x-3}{x-7} + 1 = \log_3 \dfrac{x-3}{x-1}$.

7 ა) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$; ბ) $\lg^2 x + 7\lg x + 12 = 0$; გ) $\log_5^2 x - \log_5(5x)^3 + 3 = 0$.

8

ა) $\lg(2x)+\lg(x+3)=\lg 2+\lg(6x-2)$; ბ) $\log_5(1+x)+\log_5(2x+3)=1$;

გ) $\log_{0,2}(4x)+\log_5(x^2+75)=1$; დ) $\log_2 x+\log_{0,5}(x+3)+\log_4 2=0$.

9

ა) $4^{\lg x}-6\cdot 2^{\lg x}+8=0$; ბ) $3^{2\lg x}-4\cdot 3^{\lg x}+3=0$;

გ) $49^{\lg x}-6\cdot 7^{\lg x}-7=0$; დ) $2^{2\lg x}+4\cdot 3^{\lg x}+3=0$.

10

ამოხსენი განტოლებები გალოგარითმებით:

ა) $x^{\lg x}=10000$; ბ) $x^{\lg x}=1$; გ) $10x^{\lg x}=x^2$;

დ) $2^{2\lg x}=0,4x$; ე) $3^{4\lg x}=8,1x$.

11

ამოხსენი განტოლებები:

ა) $\log_3 x=1+\log_x 9$; ბ) $\log_5\left(5+2\log_2(x^2-4)^2\right)=2$;

გ) $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x}=\dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$; დ) $5^{\lg x}+x^{\lg 5}=10$;

ე) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$; ვ) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$.

12

ამოხსენი უტოლობა:

ა) $1-2x<3$; ბ) $(x+1)(x-5)<0$; გ) $1-x^2>0$;

დ) $x^2-10x+16>0$; ე) $x^2+4x+3<0$; ვ) $(x+7)(2x+1)(x-3)\le 0$;

ზ) $(2x-5)(x^2-4)(x+2)\ge 0$; თ) $(x-2)(2x-1)(x-3)^2\le 0$;

ი) $\dfrac{2x-5}{x-4}\ge 0$; კ) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-10x+16}<0$; ლ) $\dfrac{1}{x-2}\ge 1$;

მ) $\dfrac{1}{x^2-4}\le 1$; ნ) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7}<\dfrac{1}{x+1}$.

აბა, სცადე!

იპოვე a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $\log_2(2^{2x}+a)=x$ განტოლებას აქვს 2 ფესვი;

5.8 მაჩვენებლიანი უტოლობა

მიზანი

მაჩვენებლიანი უტოლობისა და მისი ამოხსნის გზების გაცნობა

უტოლობას, რომელშიც უცნობი მონაწილეობს ხარისხის მაჩვენებელში, **მაჩვენებლიანი უტოლობა** ეწოდება.

$a^x > b$ და $a^x < b$, სადაც $a>0$, $a\neq 1$, უმარტივესი მაჩვენებლიანი უტოლობებია.

$a^x > b$ სახის უტოლობა $b \le 0$-ის შემთხვევაში ნებისმიერი x-ისთვისაა ჭეშმარიტი, ხოლო $a^x < b$ ამონახსნი არ აქვს, რადგან $y=a^x$ ფუნქციის მნიშვნელობები დადებითი რიცხვებია.

თუ $b>0$ მაშინ, უტოლობის ორივე მხარის გალოგარითმებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $a>1$-ის შემთხვევაში ლოგარითმული ფუნქცია ზრდადია, ხოლო $0<a<1$ შემთხვევაში – კლებადია, მივიღებთ:

$$x>\log_a b \text{, თუ } a>1 \text{ და } x<\log_a b \text{, თუ } 0<a<1.$$

კერძოდ, როცა $b=a^m$, მაშინ $\log_a b=m$ და $a^x>a^m$ უტოლობიდან მიიღება:

$x>m$, თუ $a>1$ და

$x<m$, თუ $a<b<1$.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა:

ა) $5^x<\frac{1}{5}$; ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 3$; გ) $3^x>\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; დ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}>243$.

ამოხსნა. ა) $5^x<\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^x<5^{-1} \Leftrightarrow x<-1$;

ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}3} \Leftrightarrow x \ge \log_{\frac{1}{2}}3$;

გ) $3^x>\sqrt[5]{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 3^x>3^{-\frac{1}{5}} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{5}$;

დ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}>243 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \Leftrightarrow$

$$\frac{1+x}{1-x}<-5 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}+5<0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1}<0 \Leftrightarrow 1<x<1,5.$$

შევნიშნოთ, რომ ბოლოს მიღებული უტოლობა ამოვხსენით ინტერვალთა მეთოდით.

პასუხი: ა) $(-\infty;-1)$; ბ) $\left[\log_{\frac{1}{2}}3;+\infty\right)$; გ) $[-0,2;+\infty)$; დ) $(1;1,5)$.

დაიმახსოვრე, რომ:

- თუ $a>1$, მაშინ მაჩვენებლიანი $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ და $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ უტოლობების გალოგარითმებისას უტოლობის ნიშანი არ იცვლება:

$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x), \quad a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x);$$

- თუ $0<a<1$, მაშინ მაჩვენებლიანი $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ და $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ უტოლობების გალოგარითმებისას უტოლობის ნიშანი იცვლება:

$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x), \quad a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x).$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ უტოლობა: ა) $0,3^{x^2+2x}>0,09^{16-x}$; ბ) $4^x-6\cdot 2^x+8\leq 0$.

ამოხსნა. ა) $0,3^{x^2+2x}>0,09^{16-x} \Leftrightarrow x^2+2x<2(16-x) \Leftrightarrow x^2+4x-32<0 \Leftrightarrow x\in(-8;4)$;

ბ) შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $2^x=y$, მაშინ $4^x=y^2$ და მოცემული უტოლობა მიიღებს სახეს: $y^2-6y+8\leq 0 \Leftrightarrow 2\leq y\leq 4$, ანუ $2\leq 2^x\leq 2^2 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$.

პასუხი: ა) $(-8;\ 4)$; ბ) $[1;2]$.

უპასუხე კითხვებს:

1) როგორ უტოლობას ეწოდება მაჩვენებლიანი?
2) რა შემთხვევაშია $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ უტოლობა: ა) $f(x)<g(x)$ უტოლობის, ბ) $f(x)>g(x)$ უტოლობის ტოლფასი?
3) რა შემთხვევაშია $a^x<b$, $a>0$, $a\neq 1$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი?
4) რა შემთხვევაშია $a^x>b$, $a>0$, $a\neq 1$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე $(-\infty;+\infty)$?

სავარჯიშოები

1 მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისების გამოყენებით შეადარე 1-ს:

ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; ბ) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; გ) $(0,9)^{-\sqrt{5}}$; დ) $\pi^{-\frac{2}{3}}$; ე) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

2 ამოხსენი უტოლობა :

ა) $4^x\geq 64$; ბ) $3^x\leq 81$; გ) $25^{-x}>\frac{1}{5}$; დ) $(0,2)^{2x-4}>(0,2)^{1-x}$;

ე) $(0,5)^x<\frac{1}{64}$; ვ) $8^x<16$; ზ) $\frac{1}{27}>\left(\frac{1}{9}\right)^x$; თ) $2^x<1$;

3 ტოლფასია თუ არა უტოლებები:

ა) $2^x>2^4$ და $x<4$?

ბ) $5^{x^2}>5^x$ და $x^2>x$?

გ) $\left(\frac{1}{16}\right)^x>\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ და $2x<x-1$?

ამოხსენი უტოლობა №4-12:

4 ა) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27$; ბ) $3^{2x-1} \ge \frac{1}{9}$; გ) $(0,4)^x < 0,16$; დ) $(0,4)^{x^2-x-20} > 1$;

ე) $2^{2x-x^2} > 1$; ვ) $2^{9-x^2} < 1$; ზ) $3^{6-x} > 3^{3x-2}$; თ) $0,3^{x^2} \le 0,09^{4x-6}$.

5 ა) $2^x > -2$; ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \le -0,2$; გ) $3^{x+1} > 2$; დ) $0,2^x < 3$; ე) $5^{2x} > 11$.

6 ა) $49\cdot 7^x < 7^{3x+3}$; ბ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} - 9 \le 0$;

გ) $3^{2x-1} > 27^2$; დ) $10^{4x-5} > 0,1^x$.

7 ა) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0,04$; ბ) $10^{4x-5} > -0,1$;

გ) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \le \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}$; დ) $2^{10x-5} \ge \frac{1}{16}$.

8 ა) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}} < 64^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-2}$; ბ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$;

გ) $6,3^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$; დ) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$;

9 ა) $2^{x^2-5x+6} < 4^x$; ბ) $2^{x^2-6x+21} < 16^x$;

გ) $(0,1)^{4x^2-2x-2} \ge 10^{2x+1}$; დ) $2^{x^2+2x} > 16^{1-\frac{x}{4}}$.

10 ა) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x < 2^{2x+6}$; ბ) $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} > 5\cdot 0,04^{x-1}$;

გ) $2^{-2x-2,5} < \frac{0,5^{x(x+3)}}{2^{0,5}}$; დ) $10^{x^2} < 10^{-3}\left(10^{3-x}\right)^2$.

11 ა) $0,125\cdot 4^{2x-3} < \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; ბ) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2-5x-35} > 1,8$;

გ) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > (0,81)^x$; დ) $2^x + 2^{x-1} < 3$.

12 ა) $9^x - 10\cdot 3^x + 9 \le 0$; ბ) $3^{2x} - 5\cdot 3^x + 6 < 0$;

გ) $2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2 > 0$; დ) $4^x < 2^{x+1} + 3$.

13 იპოვე უტოლობის მთელი ამონახსნები:

ა) $4\cdot 25^x + 25\cdot 4^x \le 29\cdot 10^x$; ბ) $2\cdot 4^x - 3\cdot 10^x < 5\cdot 25^x$.

14 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{x^2} \le \left(\sqrt{2}+1\right)^{13x+40}$; ბ) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x > \left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{1}{x}}$.

15 რომელია მეტი:

ა) $\log_2 0{,}6$ თუ $\log_{0,5} 1$? ბ) $\log_3 6$ თუ $\log_6 3$?

გ) $2^{\lg 7}$ თუ $7^{\lg 2}$? დ) $2^{\log_{0,1} 2}$ თუ 1?

16 იპოვე მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე:

ა) $y=\lg\left(x^2-3x\right)$; ბ) $y=\lg\left(\left(x-2\right)\left(1-x\right)\right)$;

გ) $y=\lg\left(x-2\right)+\lg\left(1-x\right)$; დ) $y=\lg\dfrac{x^2-4}{x+3}$.

17 ამოხსენი უტოლობათა სისტემა:

ა) $\begin{cases}2x-7<0,\\x+2>1.\end{cases}$; ბ) $\begin{cases}3x+4<1,\\5x-8>-2.\end{cases}$;

გ) $\begin{cases}9-x<4,\\-2x+1\geq 13.\end{cases}$; დ) $\begin{cases}8-x^2>4,\\x+1\geq 0.\end{cases}$;

ე) $\begin{cases}x^2-7x+10<0,\\5x-10>8.\end{cases}$; ვ) $\begin{cases}16-x^2<7,\\9x-8>10.\end{cases}$;

ზ) $\begin{cases}x^2+2x<10,\\7x+23<2.\end{cases}$; თ) $\begin{cases}5-x^2>1,\\x^2-1\geq 0.\end{cases}$.

აბა, სცადე!

იპოვე $2^x>3^{x+1}$ უტოლობის უდიდესი მთელი ამონახსნი.

5.9 ლოგარითმული უტოლობა

მიზანი

ლოგარითმული უტოლობისა და მისი ამოხსნის გზების გაცნობა

უტოლობას, რომელიც უცნობს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ შეიცავს, ლოგარითმული უტოლობა ეწოდება.

უმარტივესი ლოგარითმული უტოლობაა:

$$\log_a f(x) > \alpha, \qquad (1)$$

სადაც $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)$ საძიებელი x ცვლადის შემცველი გამოსახულება, ხოლო α ნებისმიერი რიცხვია. აქაც, ისევე როგორც მაჩვენებლიანი უტოლობის შემთხვევაში, უნდა განვასხვაოთ ორი შემთხვევა:

1. თუ $a>1$, მაშინ მოცემული უტოლობა ტოლფასია $f(x)>a^{\alpha}$ უტოლობის, რადგან ერთზე მეტი ფუძის შემთხვევაში ის ხარისხია მეტი, რომლის ხარისხის მაჩვენებელიც მეტია.

2. თუ $0<a<1$, მაშინ მოცემული უტოლობა ტოლფასია $\begin{cases} f(x) < a^{\alpha} \\ f(x) > 0 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის, რადგან ერთზე ნაკლები ფუძის შემთხვევაში მეტ ხარისხის მაჩვენებელს ნაკლები ხარისხი შეესაბამება. რაც შეეხება სისტემის მეორე უტოლობას, იგი ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არის მოთხოვნაა.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ა) $\log_3(x^2-9)>3$; ბ) $\log_{0,5}(6-2x)>-3$.

ამოხსნა. ა) $\log_3(x^2-9)>3 \Leftrightarrow x^2-9>27 \Leftrightarrow (x-6)(x+6)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$;

ბ) $\log_{0,5}(6-2x)>-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x<8, \\ 6-2x>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x<3. \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;3)$.

პასუხი. ა) $(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$; ბ) $(-1;3)$.

ანალოგიურად განიხილება $\log_a f(x)<\alpha$ უტოლობა.

უფრო ზოგადია

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad (2)$$

სახის უტოლობა, სადაც $a>0$, $a\neq 1$, ხოლო $f(x)$ და $g(x)$ საძიებელი x ცვლადის შემცველი გამოსახულებებია. აქაც ვიხილავთ 2 შემთხვევას:

1. თუ $a>1$, მაშინ მოცემული უტოლობა ტოლფასია

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

სადაც სისტემის ქვედა უტოლობა ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არის მოთხოვნაა.

2. თუ $0<a<1$, მაშინ მოცემული უტოლობა ტოლფასია

$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

აქაც ქვედა უტოლობა განსაზღვრის არის მოთხოვნაა.

შევნიშნოთ, რომ ორივე შემთხვევაში განსაზღვრის არის მოთხოვნა ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ მდგომი ორი გამოსახულებიდან მხოლოდ ერთ-ერთს მოეთხოვება, რადგან სისტემის შინაარსიდან გამომდინარე, მეორისათვის ის ავტომატურად სრულდება.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ $\log_{0,3}x<\log_{0,3}(2x-1)$ უტოლობა.

ამოხსნა. $\log_{0,3}x<\log_{0,3}(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>2x-1,\\2x-1>0,\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<1.$

პასუხი: (0,5;1)

სხვა სახის ლოგარითმული უტოლობები უნდა დავიყვანოთ (1) ან (2) სახეზე, ამასთან თვალი მივადევნოთ, რათა გარდაქმნების დროს არ გამოგვრჩეს განსაზღვრის არის მოთხოვნა. მაგალითად,

$$\log_2 f(x)+\log_2 g(x)<\log_2 k(x) \qquad (3)$$

უტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი შესაკრებების შეერთებით მიიღება

$$\log_2\left(f(x)\cdot g(x)\right)<\log_2 k(x),$$

უტოლობა, რომელიც საზოგადოდ არაა მე-3 უტოლობის ტოლფასი, რადგან მას შეიძლება სხვა განსაზღვრის არე აღმოაჩნდეს. ამიტომ, ამ სახის უტოლობაში განსაზღვრის არე შესაკრებთა შეერთებამდე უნდა მოვითხოვოთ. მე-3 უტოლობის ტოლფასია შემდეგი სისტემას:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)\cdot g(x)<k(x).\end{cases}$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ უტოლობა: $\log_2(x-2)+\log_2(x-9)<\log_2 8.$

ამოხსნა. $\log_2(x-2)+\log_2(x-9)<\log_2 8\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0,\\x-9>0,\\(x-2)\cdot(x-9)<8.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2,\\x>9,\\x^2-11x+10<0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(2;+\infty),\\x\in(9;+\infty),\\x\in(1;10).\end{cases}\Leftrightarrow x\in(9;10).$$

პასუხი: (9;10).

უპასუხე კითხვებს:

1) რას ეწოდება ლოგარითმული უტოლობა?
2) ხარისხის რა თვისებები გამოიყენება ლოგარითმული უტოლობის ამოსახსნელად?
3) რა სისტემის ტოლფასია $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ უტოლობა, როცა 0<a<1?
4) მივიღებდით თუ არა იმავე პასუხს მე-3 მაგალითში, დადებითობა შესაკრებთა შეერთების შემდეგ მიღებული ნამრავლისთვის რომ მოგვეთხოვა?

სავარჯიშოები

1

ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_3 x < 2$; ბ) $\log_3 x > 3$; გ) $\log_4 x > -1$; დ) $\log_5 x \le -2$;

ე) $\log_{0,5} x \ge 2$; ვ) $\log_8 x < \frac{2}{3}$; ზ) $\log_{0,25} x < -\frac{1}{2}$; თ) $\log_2 x \le -2$;

ი) $\log_3 x \ge 2$; კ) $\log_{\frac{1}{3}} x < -3$; ლ) $\lg(2x-7) < \lg 3$; მ) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{5} > 1$.

2

ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_5 x > \log_5 2$; ბ) $\lg(x+1) \le 3$; გ) $\log_2 (x+1) > 3$;

დ) $\lg(x-10) \le -2$; ე) $\log_{\frac{1}{3}} (x+1) \le -3$; ვ) $\log_{0,2} (5-2x) > -2$;

ზ) $\lg(2x+10) \le -1$; თ) $\lg(2x-10) \le 0$.

3

ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\lg \frac{x-1}{2-x} > 0$; ბ) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-x}{2-x} < 0$; გ) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{3x-1} < 0$;

დ) $\log_2 \frac{x-5}{x-3} > 1$; ე) $\log_{0,5} \frac{5x-3}{x+2} < -1$; ვ) $\log_3 \frac{x+3}{(x-4)} > 2$;

ზ) $\lg(x-1) < 1$; თ) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{2+x} < 1$.

4

იპოვე შეცდომა ამოხსნაში:

$\log_8 (5x-10) < \log_8 (14-x)$,

$5x-10 < 14-x$,

$6x < 24$,

$x < 4$.

5

იპოვე შეცდომა ამოხსნაში:

$$\log_3 (x+2) + \log_3 x \le 1 \Leftrightarrow \log_3 [x(x+2)] \le \log_3 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) > 0, \\ x(x+2) \le 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) > 0, \\ x^2+2x-3 \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < -2, \\ -3 \le x \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow [-3;-2) \cup (0;1].$$

6

ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_5 (3x+1) > 2$; ბ) $\log_3 (2x-4) < 2$; გ) $\log_{\frac{1}{3}} (7-2x) < -4$;

დ) $\log_{\frac{1}{2}} (2-x) > -1$; ე) $\log_2 (3-x) < -1$; ვ) $\log_{0,1} x - \log_{0,1} 28 \le \log_{0,1} \frac{1}{7}$;

ზ) $\log_{0,3} (3-x) \ge 1$; თ) $\lg x \le \lg 34 + \lg 2$; ი) $\log_{0,4} (x-4) < -1$.

7 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_{0,5}(x-2)\geq\log_{0,5}(2x-12)$; ბ) $\log_{\frac{2}{7}}(4-7x)\geq\log_{\frac{2}{7}}x$;

გ) $\lg(2x-3)>\lg(x+1)$; დ) $\log_5(x-2)\geq\log_5(2x-12)$;

ე) $\log_{0,2}(3-8x)<\log_{0,2}x$; ვ) $\lg(2x-3)>\lg(x+1)$.

8 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_3(12-2x-x^2)>2$; ბ) $\log_3(12-2x-x^2)<2$;

გ) $\log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2-x-\frac{3}{8}\right)>1$; დ) $\log_{0,5}(x+1)>\log_2(2-x)+1$;

ე) $\log_3(x+8)-\log_3(x-7)\geq\log_3 2$.

9 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_5(3x+1)+\log_5(3x-1)\leq 2$; ბ) $\log_2(x+2)+\log_2(x-5)\geq 3$;

გ) $\log_3 3+\log_3 x<\log_3(x^3-x)$; დ) $\lg 2+\lg(2x-11)>\lg(x-1)$;

ე) $\log_3(x+8)-\log_3(16-2x)<\log_3 x$; ვ) $\log_{20}x+\log_{20}(x+1)\leq\log_{20}(2x+6)$.

10 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_3^2 x>4$; ბ) $\log_3^2 x<4$; გ) $\lg^2 x+\lg x^2>3$; დ) $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\leq 0$.

11 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_2\frac{2x+6}{x+2}>1$; ბ) $\log_6\frac{x+1}{x+4}>0$;

გ) $\log_{0,(3)}\log_2\frac{2x-3}{x+2}<0$; დ) $\log_{0,2}\log_3\frac{x-1}{x+4}<0$.

12 ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_3\log_{0,2}\log_{32}\frac{x-1}{x+5}>0$; ბ) $\lg 10^{\lg(x^2+21)}>\lg 10+\frac{1}{\lg^{-1}x}$;

გ) $\frac{\log_2 4x}{\log_2 x\cdot\log_2 2x}>1$; დ) $\log_{\sqrt[8]{16}}\left(\log_{\frac{1}{4}}(x+2)\right)\geq 2$;

ე) $1+\log_{0,5}(3x^2+2)>\log_2\frac{2}{2x^2+5}$; ვ) $\log_2\sqrt{x}-2\log_{0,25}^2 x+1>0$.

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №12
ლოგარითმი

1 თუ $\log_a b=c$, მაშინ რომელი ტოლობაა მართებული?

ა) $a^b=c$; ბ) $a^c=b$; გ) $b^c=a$; დ) $b^a=c$.

2 გამოთვალე $\log_2 16+\log_5 0,2$

ა) 1; ბ) 3; გ) 5; დ) 7.

3 იპოვე x, თუ $\log_2(x+1)=2$.

ა) 2; ბ) 6; გ) 36; დ) 3.

4 გამოთვალე $\log_9 27$.

ა) 1,5; ბ) 2,5; გ) 3; დ) 3,5.

5 გამოთვალე $\log_3 2+\log_3 4,5$.

ა) –2; ბ) 1; გ) 2; დ) 3.

6 გამოთვალე $2^{1+\log_2 6}$.

ა) 2; ბ) 4; გ) 6; დ) 12.

ამოხსენი განტოლება №7-8:

7 $\log_2(4-x)=\log_4 9$.

8 $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.

ამოხსენი უტოლობა №9-10:

9 $\log_7(x^2+5x)<\log_7(x^2+10)$.

10 $\log_{0,1}(3-x)>\log_{0,1}(1+x)$.

ამ თავში ისწავლი:

- მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში;
- წერტილებს შორის მანძილის გამოთვლას კოორდინატებით;
- წრფივ მოქმედებებს ვექტორებს შორის;
- ვექტორების სკალარულ ნამრავლს და მის თვისებებს;
- ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლას;
- ვექტორის წარმოდგენას ორტების საშუალებით;
- ვექტორების მართობულობის პირობას.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- წერტილის კოორდინატების დადგენას და წერტილის პოვნას მისი კოორდინატებით;
- ვექტორების ჯამისა და რიცხვზე ნამრავლის გრაფიკულ გამოსახვას;
- კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორების ამოცნობას;
- ვექტორის წარმოდგენას ორი არაკოლინეარული ვექტორის საშუალებით სიბრტყის შემთხვევაში და სამი არაკომპლანარული ვექტორის საშუალებით სივრცის შემთხვევაში;
- ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლას;
- ვექტორების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებას.

ნიკოლოზ მუსხელიშვილი
1891–1976 წწ.

მათემატიკისა და მექანიკის ქართული სამეცნიერო სკოლის ფუძემდებელი,

საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ერთ-ერთი დამფუძნებელი და პირველი პრეზიდენტი (1942–1972 წწ.).

ნიკოლოზ მუსხელიშვილის მონოგრაფიულ ნაშრომებსა და ანალიზური გეომეტრიის სახელმძღვანელოზე ქართველ მეცნიერთა და ინჟინერთა არაერთი თაობა აღიზარდა.

კომპლექსური დავალება „დაგეგმარება ვექტორებით“
სამიზნე ცნება: ვექტორები

შენთვის კარგადაა ცნობილი, რა დიდი გამოყენება აქვს ვექტორებს ფიზიკაში. ფიზიკაში განხილული სიდიდეების დიდი ნაწილი ხომ ვექტორული სიდიდეებია. მაგრამ ვექტორებს ბევრ სხვა პრაქტიკულ საქმიანობაშიც ვიყენებთ. ერთ-ერთი ასეთია სახმელეთო, საზღვაო და საჰაერო მარშრუტების დაგეგმარება.

1-ელ ნახაზზე საჰაერო მარშრუტის ერთი სქემაა წარმოდგენილი. სქემაზე მოცემულია სივრცული (სამგანზომილებიანი) მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელზეც წერტილების სახით დატანილია დასახლებული პუნქტები. A პუნქტი რაიონული ცენტრია, B, C და D – რაიონის მაღალმთიანი სოფლები. რაიონული ცენტრი მიჩნეულია ნულოვან დონედ, ხოლო სოფლები ამ დონიდან სხვადასხვა სიმაღლეზე მდებარეობს. ერთეულის ზომად აღებულია 1 კმ.

ვერტმფრენი ყოველკვირეულად ახორციელებს წრიულ ფრენას რაიონული ცენტრიდან ოთხივე სოფლის მიმართულებით.

შენი დავალებაა:

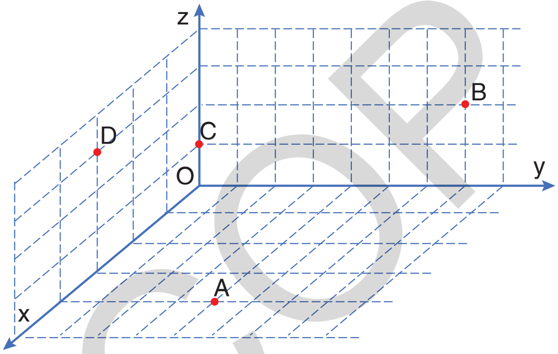
1. მოცემული სქემის ანალიზი

ა) სქემის მიხედვით დაადგინე ოთხივე პუნქტის კოორდინატები;

ბ) დაადგინე მანძილები მოცემულ პუნქტებს შორის;

გ) დაადგინე კუთხეები $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის;

დ) გაარკვიე, არის თუ არა მოცემული ოთხი პუნქტი ერთ სიბრტყეში;



ნახ. 1

ე) გაარკვიე, A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ მიმავალმა ვერტმფრენმა რა კუთხით უნდა იფრინოს აღმოსავლეთ მიმართულებასთან (OX ღერძი გვიჩვენებს სამხრეთ მიმართულებას);

ვ) გაარკვიე, რა თანმიმდევრობით უნდა მოიაროს ვერტმფრენმა სოფლები, რათა უმცირესი მანძილი დაფაროს;

დ) შეადგინე მარშრუტის ვექტორული სქემა მანძილებისა და კუთხეების მითითებით.

2. რეალური სქემის შედგენა

ა) შენი საცხოვრებლის მახლობლად (ან შენთვის მისაღებ სხვა ლოკაციაში) შეარჩიე 3-4 პუნქტი და შეადგინე ტურისტული მარშრუტის (ან სხვა დანიშნულების) სქემა;

ბ) ააგე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (სასურველია სამგანზომილებიანი);

გ) დაიტანე შერჩეული პუნქტები და მიუთითე მათი კოორდინატები. მიმართულება და მანძილი გამოსახე ვექტორების საშუალებით;

დ) მიუთითე გადაადგილების თანმიმდევრობა და კუთხეები მიმართულობათა შორის.

3. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;

- რა პრაქტიკული გამოყენება აქვს შენ მიერ ჩატარებულ სამუშაოს;
- როგორ დაადგინე პუნქტების კოორდინატები;
- როგორ გამოთვალე მანძილები პუნქტებს შორის;
- როგორ დაადგინე კუთხეები მიმართულებათა შორის;
- რა ნიშნით შეარჩიე პუნქტები ტურისტული (ან სხვა დანიშნულების) მარშრუტისთვის;
- როგორ დაადგინე შერჩეული პუნქტების კოორდინატები;
- რა ტექნიკური საშუალებები გამოიყენე საჭირო ზომების დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად;
- ნაშრომს დაურთე შესაბამისი ნახაზები და შენ მიერ შერჩეული პუნქტების ფოტოები.

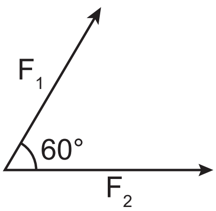
6.1 ვექტორები სიბრტყეზე

მიზანი

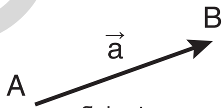
ვექტორის ცნებისა და ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების გამეორება

ამოცანა 1. მდინარეში მოძრავ ნავზე მოქმედებს ორი ძალა: ნავის მოტორის ძალა F_1=80ნ. და მდინარის დინების ძალა F_2=50ნ. ძალებს შორის კუთხე 60^o-ის ტოლია. გამოვთვალოთ ამ ორი ძალის ტოლქმედი ძალის სიდიდე.

ამოცანაში მოცემული ძალები **ვექტორული სიდიდეებია,** რადგან ძალა ზომასთან ერთად მოქმედების მიმართულებითაც ხასიათდება. ვექტორული სიდიდეებია, აგრეთვე: სიჩქარე, აჩქარება, წონა და სხვა.



ვექტორებს მიმართულების მქონე მონაკვეთებით, ანუ ისრით გამოსახავენ. 1-ელ ნახაზზე მოცემულია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი. მისი სიგრძე იმავე AB მონაკვეთის სიგრძეა, ხოლო მიმართულება AB სხივის მიმართულება. A წერტილს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სათავე, ანუ საწყისი წერტილი, ხოლო B წერტილს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის წვერო, ანუ ბოლო წერტილი ეწოდება.

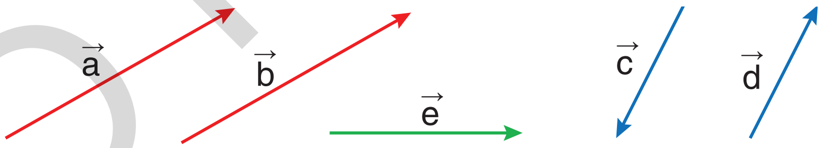


ნახ. 1

ვექტორი შეიძლება ერთი პატარა ლათინური ასოთიც აღვნიშნოთ. მაგალითად, 1-ელ ნახაზზე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი იგივე $\vec{a}$ ვექტორია.

თუ ვექტორის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ასეთ ვექტორს **ნულოვანი ვექტორი** ეწოდება. მისი აღნიშვნაა $\vec{0}$.

ვექტორებს, რომელთა გამომსახველი მონაკვეთები ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ, **კოლინეარული** ვექტორები ეწოდება. ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულად ითვლება. მე-2 ნახაზზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$, აგრეთვე, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ კოლინეარული ვექტორები, ხოლო $\vec{a}$ და $\vec{e}$ ისევე, როგორც $\vec{a}$ და $\vec{c}$, **არაკოლინეარული** ვექტორებია.



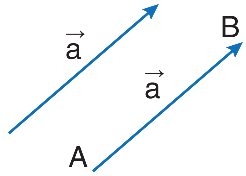
ნახ. 2

კოლინეარული ვექტორები შეიძლება იყოს **თანამიმართული** ან **საწინააღმდეგოდ მიმართული.** მე-2 ნახაზზე თანამიმართული ვექტორებია $\vec{a}$ და $\vec{b}$, ხოლო საწინააღმდეგოდ მიმართული – $\vec{c}$ და $\vec{d}$.

$\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეს a-თი, ხოლო $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძეს AB-თი აღვნიშნავთ. ნულოვანი ვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია, მიმართულება კი – ნებისმიერი.

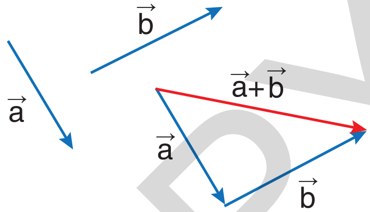
ორ ვექტორს **ტოლი** ეწოდება, თუ ისინი თანამიმართული ვექტორებია და ტოლი სიგრძისაა. მე-2 ნახაზზე ასეთებია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. $\vec{c}$ და $\vec{d}$ სიგრძით ტოლი, მაგრამ არატოლი ვექტორებია, რადგან მათ განსხვავებული მიმართულება აქვთ.

ვექტორზე თუ პარალელური გადატანით ვიმოქმედებთ, მივიღებთ მის ტოლ ვექტორს, რადგან პარალელური გადატანა არც სიგრძეს და არც მიმართულებას არ ცვლის (ნახ. 3). მე-3 ნახაზზე მოცემული $\vec{a}$ ვექტორი პარალელური გადატანით მის ტოლ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორში გადავიდა. ამიტომ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორსაც იმავე $\vec{a}$ ასოთი აღვნიშნავთ და ვამბობთ: $\vec{a}$ ვექტორი მოვდეთ A წერტილში.



ნახ. 3

ვთქვათ, მოცემულია ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. $\vec{b}$ ვექტორი მოვდოთ $\vec{a}$ ვექტორის ბოლოს (ნახ. 4). ვექტორს, რომელიც აერთებს $\vec{a}$ ვექტორის სათავეს $\vec{b}$ ვექტორის ბოლოსთან, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება.

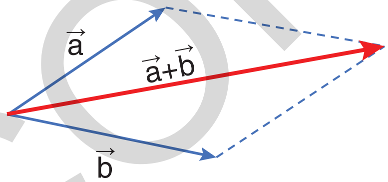


ნახ. 4

შეკრების ამ წესს ვექტორების შეკრების სამკუთხედის წესი ეწოდება.

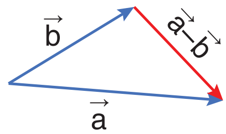
ადვილი სანახავია, რომ მართებულია ტოლობები:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ და $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.



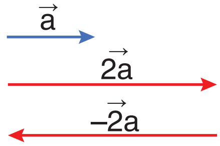
ნახ. 5

არაკოლინეარული ვექტორების შემთხვევაში, შეკრების სამკუთხედის წესის გარდა, არსებობს შეკრების პარალელოგრამის წესი. ამ წესის მიხედვით შესაკრები ვექტორები უნდა მოვდოთ ერთ წერტილში და ამ ვექტორებზე, როგორც მეზობელ გვერდებზე, ავაგოთ პარალელოგრამი. აგებული პარალელოგრამის ის დიაგონალი, რომელიც მოდების წერტილიდან გამოდის და მიმართულია მოპირდაპირე წვეროსკენ, იქნება მოცემულ ვექტორთა ჯამი (ნახ.5). პარალელოგრამის წესიდან თვალსაჩინოა, რომ ვექტორთა შეკრებას აქვს გადანაცვლებადობის თვისება: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.



ნახ. 6

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (ნახ. 6).



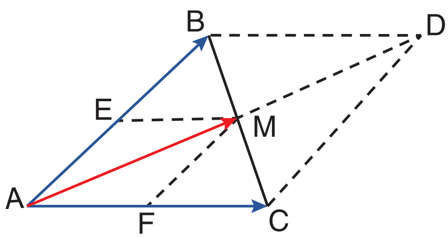
ნახ. 7

$\vec{a}$ ვექტორის $\alpha \neq 0$ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომლის სიგრძეა $|\alpha|a$, ხოლო მიმართულება ემთხვევა $\vec{a}$-ს მიმართულებას, თუ $\alpha>0$ და $\vec{a}$-ს საწინააღმდეგო მიმართულებას, თუ $\alpha<0$. თუ $\alpha=0$, მაშინ $0\vec{a}=\vec{0}$. მე-7 ნახაზზე ნაჩვენებია $\vec{a}$ ვექტორის 2-ზე და –2-ზე გამრავლების შედეგად მიღებული ვექტორები.

თუ $\alpha=-1$, მაშინ $\alpha\vec{a}=-1\vec{a}=-\vec{a}$. $-\vec{a}$ ვექტორს $\vec{a}$-ს მოპირდაპირე ვექტორი ეწოდება: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. მოპირდაპირე ვექტორებს ტოლი სიგრძე და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ნებისმიერი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორისათვის სრულდება ტოლობა: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

$\vec{b}=\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+\alpha_3\vec{a_3}+\ldots+\alpha_n\vec{a_n}$ ვექტორს, სადაც $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\ldots,\vec{a_n}$ ვექტორების **წრფივი კომბინაცია** ეწოდება.

ამოცანა 2. ვთქვათ, AM მონაკვეთი ABC სამკუთხედის მედიანაა. გამოვსახოთ $\overrightarrow{AM}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის საშუალებით.



ნახ. 8

ამოხსნა: E და F წერტილები AB და AC გვერდების შუა წერტილებია (ნახ. 8). ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის თანახმად $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$. მეორე მხრივ, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. აქედან ვღებულობთ:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

პასუხი: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

მე-8 ნახაზზე ABDC ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. ამიტომ:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right). \qquad (2)$$

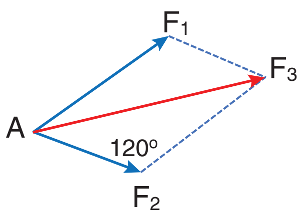
თუ (1) და (2) ტოლობებს შევადარებთ, მივიღებთ: $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

შევნიშნოთ, რომ ეს ტოლობა მართებულია ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისა და ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის:

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$

ე.ი. ვექტორების ჯამის რიცხვზე გასამრავლებლად შეგვიძლია, თითოეული შესაკრები გავამრავლოთ რიცხვზე და მიღებული ვექტორები შევკრიბოთ.

დავუბრუნდეთ 1-ელ ამოცანას. მე-9 ნახაზზე ნავზე მოქმედი F_1 და F_2 ძალები $\overrightarrow{AF_1}$ და $\overrightarrow{AF_2}$ ვექტორებით არის გამოსახული, ხოლო ამ ძალების ტოლქმედი ძალაა $\overrightarrow{AF_3}$, რომელიც $\overrightarrow{AF_1}$ და $\overrightarrow{AF_2}$ ვექტორების ჯამის ტოლია. ამ ძალის სიდიდის, ანუ AF_3-ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ კოსინუსების თეორემით AF_2F_3 სამკუთხედში:



ნახ. 9

$AF_3^2=AF_1^2+AF_2^2-2AF_1\cdot AF_2\cdot\cos120^\circ=6400+2500+4000=12900.$

$AF_3\approx113{,}58$ ნ.

პასუხი: ტოლქმედი ძალის სიდიდეა 113,58 ნ.

უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება ვექტორი?
2. რა მახასიათებლები გააჩნია ვექტორს?
3. რა ვექტორული სიდიდეები იცი?
4. როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული ვექტორები?
5. როგორ ვექტორებს ეწოდება თანამიმართული ვექტორები?
6. როგორ ვექტორებს ეწოდება ტოლი ვექტორები?
7. შეიძლება თუ არა ორ ტოლ ვექტორს სხვადასხვა სათავე ჰქონდეს?
8. როგორ განიმარტება ვექტორთა ჯამი, სხვაობა და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი?
9. როგორ ჩამოაყალიბებ სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესს?
10. როგორ განიმარტება ვექტორთა წრფივი კომბინაცია?
11. როგორ ვექტორებს ეწოდება მოპირდაპირე ვექტორები?
12. როგორ შეგვიძლია ვექტორების ჯამის რიცხვზე გამრავლება?

სავარჯიშოები

1 ჩაწერე ვექტორი, რომლის ბოლო წერტილია A, საწყისი წერტილი – B.

2 რამდენი განსხვავებული ვექტორის მოცემაა შესაძლებელი: ა) მართკუთხედის გვერდებით? ბ) ტრაპეციის გვერდებით?

3 თუ ABCD ტრაპეციის ფერდებია AB და CD, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორები:

ა) ტოლია; ბ) არაკოლინეარულია; გ) კოლინეარულია; დ) თანამიმართულია.

4 თუ ABCD ტრაპეციის ფერდებია AB და CD, მაშინ $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორები:

ა) ტოლია; ბ) არაკოლინეარულია;

გ) თანამიმართულია; დ) საწინააღმდეგოდ მიმართულია.

5 მოცემული პარალელოგრამის ნახაზის მიხედვით დაადგინე, რომელია:

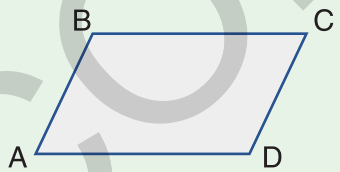
ა) $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის ტოლი ვექტორი;

ბ) $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი;

გ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორების ჯამი;

დ) $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორების სხვაობა;

ე) არაკოლინეარულ ვექტორთა წყვილები.



6 დაადგინე, მოცემული ვექტორებიდან რომლებია ნულოვანი ვექტორი:

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$; გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$; დ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}$; ე) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.

7 მოცემული ტოლობებიდან რომელი არაა მართებული?

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$;

გ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; დ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

8 $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ტოლი ვექტორებია, ამასთან ეს ვექტორები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. რა ფიგურაა ABDC ოთხკუთხედი?

9 $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული და განსხვავებული სიგრძის ვექტორები, ამასთან ეს ვექტორები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. რა ფიგურაა ABCD ოთხკუთხედი?

10 მოცემულია არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. რომელი ვექტორია $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის კოლინეარული?

ა) $\vec{a}-\vec{b}$; ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}$; გ) $2\vec{a}-3\vec{b}$; დ) $2\vec{a}+2\vec{b}$; ე) $2\vec{a}-2\vec{b}$.

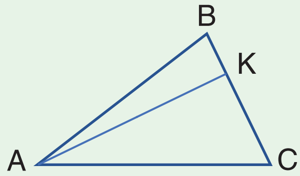
11 გაამარტივე გამოსახულება: $6\left(0,5\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+4\left(0,25\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$.

12 გაამარტივე გამოსახულება: $10\left(\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)+8\left(\frac{1}{4}\vec{a}-0,5\vec{b}\right)$.

13 დაამტკიცე ტოლობა: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$.

14 ABC სამკუთხედში BC გვერდის შუა წერტილია E. გამოსახე $\overrightarrow{AE}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით.

15 ნახაზზე მოცემულ ABC სამკუთხედში BK:KC=1:2. გამოსახე $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით.



16 წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა. ერთი ძალის სიდიდეა 20 ნიუტონი, მეორის – 16 ნიუტონი, ხოლო ძალებს შორის კუთხე – 120°. გამოთვალე ტოლქმედი ძალის სიდიდე.

17 წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა. ერთი ძალის სიდიდეა 8 ნიუტონი, მეორის – 6 ნიუტონი. გამოთვალე ამ ძალებს შორის კუთხე, თუ მათი ტოლქმედი ძალის სიდიდეა 10 ნიუტონი.

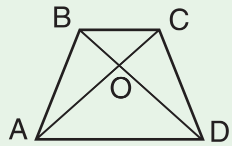
18 ABCD ტრაპეციაში MN შუახაზია. გამოსახე $\overrightarrow{MN}$ ვექტორი $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებით.

19 დაამტკიცე, რომ:
ა) ორი თანამიმართული ვექტორის ჯამის სიგრძე ამ ვექტორების სიგრძეთა ჯამის ტოლია;
ბ) ორი არაკოლინეარული ვექტორის ჯამის სიგრძე ამ ვექტორების სიგრძეთა ჯამზე ნაკლებია.

20 დაამტკიცე, რომ ორი თანამიმართული არანულოვანი ვექტორიდან თითოეული მეორის დადებით რიცხვზე გამრავლებით მიიღება.

21 დაამტკიცე, რომ ორი საწინააღმდეგოდ მიმართული არანულოვანი ვექტორიდან თითოეული მეორის უარყოფით რიცხვზე გამრავლებით მიიღება.

22 ნახაზზე მოცემულია ABCD ტრაპეცია. გამოსახე $\overrightarrow{AO}$ ვექტორი $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორების საშუალებით, თუ AD=2BC.



23 ABC სამკუთხედში AB=5სმ, AC=8სმ. AK ბისექტრისაა. გამოსახე $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით.

24 ABC სამკუთხედში $\angle C=90^\circ$, AC= 5სმ, BC=10სმ. CK სიმაღლეა. გამოსახე $\overrightarrow{CK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით.

25 დაამტკიცე, რომ თუ M არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

26 დაამტკიცე, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ იმავე სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით წარმოდგება.

27 გამოთვალე საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე A(3;–2) და B(–3;2) წერტილებს შორის მანძილი.

28 პარალელური გადატანის კოორდინატებია (5;–4). რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა ამ პარალელური გადატანით A(–8;0) წერტილი?

29 რა მანძილზე გადაიტანს (–5; 12) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანა საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე წერტილებს?

30 საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე A წერტილის კოორდინატებია (2; 5), ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (–1; 1).

ა) გამოთვალე AB მონაკვეთის სიგრძე;

ბ) იპოვე იმ პარალელური გადატანის კოორდინატები, რომელსაც A წერტილი კოორდინატთა სათავეში გადააქვს. რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა ამ პარალელური გადატანით B წერტილი?

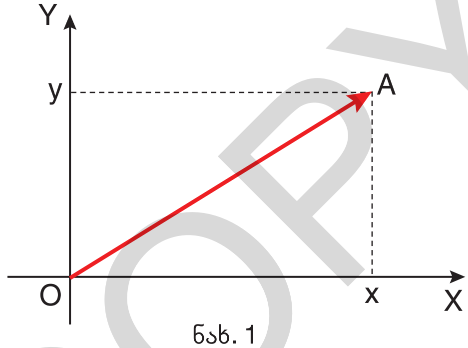
31 P_1 პარალელური გადატანის კოორდინატებია (a; b), ხოლო P_2 პარალელური გადატანის კოორდინატები – (c; d). რა კოორდინატები ექნება იმ პარალელურ გადატანას, რომელიც P_1-ის და P_2-ის თანმიმდევრობით შესრულებისას მიიღება?

6.2 ვექტორის კოორდინატები

მიზანი

გავიმეოროთ ვექტორის კოორდინატების ცნება, ვექტორებზე მოქმედებების ჩაწერა და ვექტორის სიგრძის გამოთვლა კოოდინატებით.

საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე ვექტორის კოორდინატები მისი წვეროსა და სათავის კოორდინატების სხვაობას ეწოდება. ე.ი. თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის A სათავის კოორდინატებია $(x_1;\ y_1)$, ხოლო B წვეროს კოორდინატები – $(x_2; y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(x_2-x_1; y_2-y_1)$.



ნახ. 1

თუ ვექტორი კოორდინატთა სათავეშია მოდებული, მაშინ, ცხადია, მისი კოორდინატები დაემთხვევა წვეროს კოორდინატებს. ამიტომ ვექტორის კოორდინატების საპოვნელად ის უნდა მოვდოთ კოორდინატთა სათავეში და დავადგინოთ წვეროს კოორდინატები. 1-ელ ნახაზზე მოცემულია OA ვექტორი, რომლის კოორდინატებია $(x; y)$.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე, თუ A-ს კოორდინატებია $(x_1; y_1)$ ხოლო B-ს კოორდინატები – $(x_2; y_2)$.

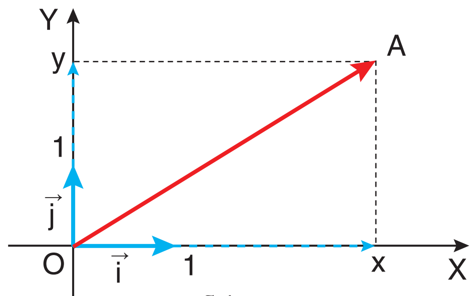
ამოხსნა: ვიცით, რომ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე AB მონაკვეთის სიგრძის, ანუ A და B წერტილებს შორის მანძილის ტოლია:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}\ . \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x; y)$, მაშინ (1) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \qquad (2)$$

ვთქვათ, $\vec{i}$ და $\vec{j}$ შესაბამისად $(1; 0)$ და $(0; 1)$ კოორდინატების მქონე ვექტორებია. მე-2 ნახაზზე ეს ვექტორები ცისფრად არის წარმოდგენილი. ამ ვექტორებს **ორტები** ეწოდება.



ნახ. 2

ამავე ნახაზზე მოცემულია $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი კოორდინატებით $(x; y)$. როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}\ . \qquad (3)$$

მე-3 ტოლობა ნიშნავს, რომ საკოორდინატო სიბრტყეში მოცემული ნებისმიერი ვექტორი წარმოიდგინება ორტების წრფივ კომბინაციად, რომლის კოეფიციენტები ამ ვექტორის კოორდინატებია.

ამოცანა 2. ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_1; y_1)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(x_2; y_2)$. დავადგინოთ $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

ამოხსნა. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მე-3 ფორმულის მიხედვით წარმოვადგინოთ $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტების საშუალებით:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},\ \ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\ .$$

ამ ტოლობების შეკრებით და შესაკრებთა დაჯგუფებით მივიღებთ:

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\ \right)=\left(x_1+x_2\right)\vec{i}+\left(y_1+y_2\right)\vec{j}\ .$$

მიღებული ტოლობიდან ვასკვნით:

ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები შესაკრებთა შესაბამისი კოორდინატების ჯამის ტოლია.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები კოორდინატების ამ რიცხვზე ნამრავლის ტოლია.

ე.ი. თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x; y)$, მაშინ ნებისმიერი α რიცხვისათვის $\alpha\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(\alpha x; \alpha y)$.

მაგალითი. მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{a}(2;-1)$ და $\vec{b}(-3;2)$. გამოვთვალოთ $5\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

ამოხსნა. $5\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორის პირველი კოორდინატი იქნება $5\cdot2-3\cdot(-3)=19$, ხოლო მეორე კოორდინატი – $5\cdot(-1)-3\cdot2=-11$.

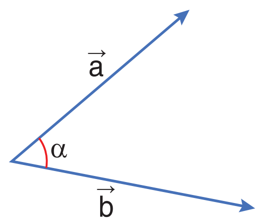
პასუხი: $(19; -11)$.

ამოცანა 3. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: $A(-3; 1)$, $B(2;-1)$, $C(0; 4)$ და $D(-2; 7)$. გამოვთვალოთ $4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

ამოხსნა. პირველ რიგში დავადგინოთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორების კოორდინატები: $\overrightarrow{AB}$-ს პირველი კოორდინატია $2-(-3)=5$, მეორე კოორდინატი $-1-1=-2$; $\overrightarrow{CD}$-ს პირველი კოორდინატია $2-0=-2$, მეორე კოორდინატი $7-4=3$. ამიტომ, $4\overrightarrow{AB}$-ს კოორდინატებია $(20;-8)$, ხოლო $3\overrightarrow{CD}$-ს კოორდინატები $(-6; 9)$; აქედან გამომდინარე, $4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატებია $(20-(-6); -8-9)=(26;-17)$. ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მე-2 ფორმულით: $\sqrt{26^2+17^2}=\sqrt{965}$.

პასუხი. $\sqrt{965}$.

ორ ვექტორს შორის კუთხე მათ მიმართულებებს შორის კუთხეს ეწოდება. იმისათვის, რომ ვექტორებს შორის კუთხე ვიპოვოთ, ისინი ერთ წერტილში უნდა მოვდოთ. ცხადია, თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 0°-ის, ხოლო საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 180°-ის ტოლია. არაკოლინეარულ ვექტორებს შორის კუთხე (0°; 180°) შუალედშია მოთავსებული.



უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ დაადგენ საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე ვექტორის კოორდინატებს?
2. რა არის ნულოვანი ვექტორის კოორდინატები?
3. როგორ გამოითვლი ვექტორის სიგრძეს მისი კოორდინატებით?
4. რას უდრის ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები? სხვაობის კოორდინატები?
5. რას უდრის მოცემული ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორის კოორდინატები?
6. რა კოორდინატები აქვს ორტებს?

სავარჯიშოები

1 საკოორდინატო სიბრტყეზე დახაზე ვექტორი, რომლის კოორდინატებია:

ა) (0; 2); ბ) (2; 0); გ) (–2; –4); დ) (4; 2); ე) (–0,5; 5); ვ) ($\sqrt{2}$;1); ზ) (1; 1).

2 იპოვე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–4; 2),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (3; 5);
ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–6; 0),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (0; 8);
გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,1; 0,3),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (1,1; 3,2);
დ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{8}$; 1),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – ($\sqrt{2}$; –1).

3 გამოთვალე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 2),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (3; 5);
ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–5; 0),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (0; 12);
გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,1; 0,2),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (1,1; 3,2);
დ) A წერტილის კოორდინატებია (–$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (0; $\sqrt{8}$).

4 გამოთვალე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ მისი კოორდინატებია:

ა) (0; 5); ბ) (5; 0); გ) (–3; 3); დ) (15; –8); ე) (–15; 8); ვ) ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$); ზ) (1; tg60°).

5 წარმოადგინე ორტების საშუალებით $\vec{a}$ ვექტორი, თუ მისი კოორდინატებია:

ა) (2; 2); ბ) (3; 2); გ) (–2; 3); დ) (–1; 4); ე) (1; –4); ვ) (0; 5); ზ) (5; 0).

6 დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$; ბ) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$; გ) $\vec{a} = -3\vec{i} - 5\vec{j}$;

დ) $\vec{a} = 5\vec{j}$; ე) $\vec{a} = 3\vec{i}$; ვ) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$; ზ) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

7 დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; ბ) $\vec{a} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$; გ) $\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$;

დ) $\vec{a} = 7\vec{j}$; ე) $\vec{a} = -5\vec{i}$; ვ) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; ზ) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$.

8 $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (7; –9). იპოვე:

ა) $-\vec{a}$; ბ) $2\vec{a}$; გ) $-3\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები.

9 გამოთვალე $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(6;-9)$,
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(-4;\ 6)$;

ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(-0{,}5;\ 1)$,
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(-1;\ 0{,}5)$;

გ) $\vec{a}=3\vec{i}$, ხოლო $\vec{b}=-5\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტებია;

დ) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, ხოლო $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტებია.

10 საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: $A(2{,}2;1)$, $B(-0{,}8;2)$, $C(1{,}2;0{,}4)$ და $D(5{,}7;-0{,}1)$. გამოთვალე $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატები.

11 გამოთვალე $\vec{a}+2\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(7;-4)$
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(-2;\ 0)$;

ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(-6;\ 1)$,
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(-3;\ 2)$;

გ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(2\sin\alpha\ ;0)$,
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(0;\cos\alpha)$;

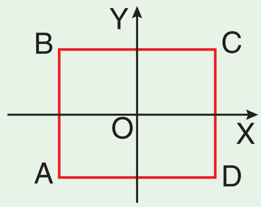
დ) $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}$, ხოლო $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ერთეულოვანი ვექტორებია.

12 საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: $A(2;1)$, $B(8;-3)$, $C(4;4)$ და $D(5;0)$. გამოთვალე $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

13 ვექტორის სიგრძეა 10სმ, ხოლო პირველი კოორდინატი – 8სმ. იპოვე მეორე კოორდინატი.

14 ვექტორის სიგრძეა 17სმ, ხოლო მეორე კოორდინატი – 15სმ. იპოვე პირველი კოორდინატი.

15 საკოორდონატო სიბრტყეზე მდებარე ABCD კვადრატის ცენტრი კოორდინატთა სათავე, ხოლო გვერდები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია. იპოვე $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ კვადრატის გვერდი 2სმ-ის ტოლია.



16 იპოვე კუთხე $\vec{i}(1;0)$ და $\vec{a}(1;1)$ ვექტორებს შორის.

17 იპოვე კუთხე:

ა) $\vec{a}(1;1)$ და $\vec{b}(-1;0)$ ვექტორებს შორის;

ბ) $\vec{j}(0;1)$ და $\vec{a}(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ ვექტორებს შორის;

გ) $\vec{a}(1;1)$ და $\vec{b}(\sqrt{3};1)$ ვექტორებს შორის.

18 გამოთვალე ვექტორის მიერ $\vec{i}(1;0)$ ვექტორთან შედგენილი კუთხე, თუ მისი კოორდინატებია:
ა) $(2;2)$; ბ) $(-1;-1)$; გ) $(\sqrt{3};1)$; დ) $(1;\sqrt{3})$; ე) $(-1;-\sqrt{3})$; ვ) $(\sqrt{3};-1)$.

19 მოცემული კოორდინატების მიხედვით გაარკვიე, რომელი ვექტორებია თანამიმართული და რომელი საწინააღმდეგოდ მიმართული:
ა) $(3;2)$ და $(-6;-4)$; ბ) $(1{,}5;-5)$ და $(3;10)$; გ) $(1;-4)$ და $(3;-12)$; დ) $(0;7)$ და $(7;0)$.

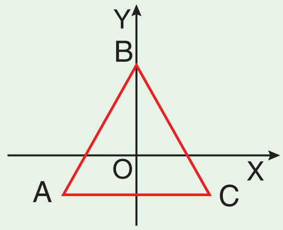
20 იპოვე x, თუ $\vec{a}$ ვექტორი კოორდინატებით $(x;2)$ და $\vec{b}$ ვექტორი კოორდინატებით $(8;x)$ ა) თანამიმართული ვექტორებია; ბ) საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.

21 იპოვე x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ვექტორს კოორდინატებით $(x-2;4-x)$ ექნება უმცირესი სიგრძე.

22 იპოვე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძეა 20სმ, ხოლო $\vec{a}$ ვექტორის:
ა) თანამიმართული ვექტორის კოორდინატებია $(3;4)$;
ბ) საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორის კოორდინატებია $(6;-8)$.

23 იპოვე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $3\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $(1;-4)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(2;-3)$.

24 საკოორდონატო სიბრტყეზე მდებარე ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, ხოლო B წვეროს კოორდინატები – $(0;1)$. იპოვე $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ ვექტორის კოორდინატები.



25 წარმოადგინე $\vec{a}(4;-9)$ ვექტორი $\vec{b}(2;1)$ და $\vec{c}(5;-3)$ ვექტორების საშუალებით.

26 იპოვე α კუთხე $[0°;180°]$ შუალედიდან, თუ:
ა) $\cos\alpha=0$; ბ) $\cos\alpha=1$; გ) $\cos\alpha=-1$; დ) $\cos\alpha=0{,}5$; ე) $\cos\alpha=-0{,}5$; ვ) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

27 სამკუთხედის გვერდებია: ა) 3სმ, 3სმ, 4სმ; ბ) 3სმ, 4სმ, 5სმ; გ) 4სმ, 5სმ, 7სმ. იპოვე სამკუთხედის უდიდესი კუთხის კოსინუსი.

28 მოცემული გვერდების მიხედვით დაადგინე, რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა, რომელი მართკუთხა და რომელი ბლაგვკუთხა:
ა) 3სმ, 5სმ, 7სმ; ბ) 8სმ, 15სმ, 17სმ; გ) 13სმ, 14სმ, 15სმ.

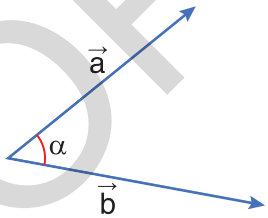
6.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი

მიზანი

სკალარული ნამრავლის განმარტება, თვისებები და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება

ვექტორების შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების მოქმედებების შედეგად, როგორც ვნახეთ, ისევ ვექტორული სიდიდე მიიღება. ამ პარაგრაფში ორ ვექტორზე ისეთ მოქმედებას განვიხილავთ, რომლის შედეგად სკალარულ სიდიდეს, ანუ რიცხვს მივიღებთ. ამ მოქმედებას **ვექტორების სკალარული ნამრავლი** ეწოდება.

განმარტება. ორი ვექტორის საკალარული ნამრავლი მათ სიგრძეთა ამ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსზე ნამრავლს ეწოდება.



$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების საკალარული ნამრავლი $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ჩანაწერით აღინიშნება. განმარტების თანახმად

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

სადაც α მოცემულ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეა. $0°\leq\alpha\leq180°$.

ცხადია, რომ თუ ორი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი იქნება ნულის ტოლი:

$$\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{b}=a\cdot0=0\cdot b=0.$$

მაგრამ, სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლი არანულოვანი ვექტორების შემთხვევაშიც შეიძლება აღმოჩნდეს. კერძოდ, როცა ამ ვექტორებს შორის კუთხე 90^o-ის ტოლია. მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha=ab\cos90^o=ab\cdot0=0.$$

პირიქით, თუ ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლი აღმოჩნდა, მაშინ მათ შორის კუთხის კოსინუსი იქნება ნულის ტოლი, და რადგან ვექტორებს შორის კუთხე $[0;180°]$ შუალედშია, ხოლო ამ შუალედში კოსინუსი მხოლოდ 90^o-ზე ხდება 0, ვასკვნით, რომ ვექტორებს შორის კუთხე 90^o-ის ტოლია. მივიღეთ თეორემა:

ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მაშინ და მხოლოდ მაშინაა 0-ის ტოლი, როცა ეს ვექტორები ურთიერთმართობულია.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

იმის გამო, რომ თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდე 0 გრადუსია, ხოლო $\cos0^o=1$, ასეთი ვექტორების სკალარული ნამრავლი მათი სიგრძეთა ნამრავლის ტოლი იქნება. კერძოდ,

ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი, ანუ სკალარული კვადრატი, მისი სიგრძის კვადრატის ტოლია.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\right)^2=a^2.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ სკალარულ ნამრავლს აქვს გადანაცვლებადობისა და განრიგებადობის თვისებები: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, ამიტომ ვექტორებზე მოქმედებების დროს შეგვიძლია რიცხვებზე მოქმედებების ანალოგიურად მოვიქცეთ.

თეორემა. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლების ჯამის ტოლია, ანუ

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, სადაც $(x_1;\ y_1)$ არის $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, ხოლო $(x_2;\ y_2)$ – $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატებია, შესაბამისად $(x_1;y_1)$ და $(x_2;y_2)$. წარმოვადგინოთ ეს ვექტორები ორტების საშუალებით:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}.$$

გავამრავლოთ სკალარულად ეს ორი ტოლობა და ვისარგებლოთ ტოლობებით:

$$\left(\vec{i}\right)^2=\left(\vec{j}\right)^2=1,\ \ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)=x_1x_2\left(\vec{i}\right)^2+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+x_2y_1\vec{j}\cdot\vec{i}+y_1y_2\left(\vec{j}\right)^2=x_1x_2+y_1y_2.$$

დამტკიცებული თეორემა ტოლობის სახით შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha=x_1x_2+y_1y_2, \qquad (2)$$

სადაც $(x_1;y_1)$ და $(x_2;y_2)$ შესაბამისად, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატებია.

მიღებული ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ორ ვექტორს შორის კუთხე მათი კოორდინატების მიხედვით.

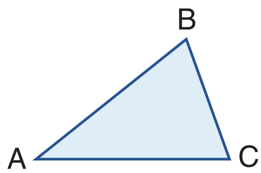
მაგალითი. გამოვთვალოთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ ამ ვექტორების კოორდინატებია $(x_1;y_1)$ და $(x_2;y_2)$.

ამოხსნა. მე-2 ტოლობიდან $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{ab}$. თუ ამ ტოლობაში შევიტანთ ვექტორების სიგრძის გამოსათვლელ ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \text{ და } \alpha=\arccos\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \qquad (3)$$

სკალარული ნამრავლის გამოყენებით მარტივდება ზოგიერთი თეორემის დამტკიცება.

ამოცანა. დავამტკიცოთ ვექტორების გამოყენებით კოსინუსების თეორემა.



დამტკიცება. ABC სამკუთხედებში $\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}$ ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{AC}-\overline{BC}\right)^2=\left(\overline{AC}\right)^2+\left(\overline{BC}\right)^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}.$$

მიღებული ტოლობა, სკალარული ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარე იგივეა, რაც

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\alpha.$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რა სიდიდეა ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი?
2. რის ტოლია ორტების სკალარული ნამრავლი?
3. რას უდრის ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი?
4. რა შემთხვევაშია ორი ვექტორი ურთიერთმართობული?
5. როგორ გამოითვლი ვექტორებს შორის კუთხეს მათი კოორდინატებით?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ a=3სმ, b=4სმ.

2 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ a=2სმ, b=5სმ.

3 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

ა) a=6სმ, b=7სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 60^o;
ბ) a=4სმ, b=7სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 45^o;
გ) a=12სმ, b=11სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 120^o;
დ) a=1,13სმ, b=3,27სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 90^o.

4 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (6; 1) და (–2; 9); ბ) (–3; 0) და (0; 13);
გ) $(\sqrt{2};\sqrt{3})$ და $(\sqrt{8};0)$; დ) $(\sqrt{12};-1)$ და $(\sqrt{3};6)$.

5 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (3; 4) და (–3; 4); ბ) (–12; 5) და (5; 12); გ) (6; –8) და (8; 6); დ) (15; 8) და (8; 15).

6 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (2; 4) და (–2; –4); ბ) (–5; 7) და (7; 5);
გ) (1; 6) და (3; 18); დ) $(\sqrt{3};1)$ და $(1;\sqrt{3})$.

7 იპოვე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ:

ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1,5$, ხოლო $a\cdot b=3$; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, ხოლო $a\cdot b=\sqrt{6}$;

გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, ხოლო $a\cdot b=-2$.

8 მოცემული კოორდინატების მიხედვით დაადგინე, მახვილია, მართია თუ ბლაგვი ვექტორებს შორის კუთხე:

ა) (1; 7) და (–4; 2); ბ) (–10; 5) და (0; –3); გ) (6; –1) და (1; 6); დ) (11; 12) და (–12; 9).

9 იპოვე x, თუ ვექტორები კოორდინატებით (2; x) და $(x^2; 3)$ ურთიერთმართობული ვექტორებია.

10 იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –1), ხოლო $\overline{BC}$ ვექტორის კოორდინატები (2; 2).

11 $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (11; 1), $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (–9; 10). იპოვე $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორზე სკალარული ნამრავლი.

12 $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეა 3სმ, $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე – 5სმ, ხოლო ამ ვექტორებს შორის კუთხე – 30^o. იპოვე $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

13 იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (–2; 1), ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები (1; –2).

14 ABC სამკუთხედში AB=5 სმ, BC=8 სმ და AC=7 სმ. გამოთვალე:
ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$;
ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$, სადაც BD სამკუთხედის მედიანაა;
გ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BK}$, სადაც BK სამკუთხედის ბისექტრისაა.

15 ABCD პარალელოგრამში AB=3 სმ, BC=4 სმ. გამოთვალე $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

16 გამოთვალე საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე A(–1; –1) და B(5; 7) წერტილებს შორის მანძილი.

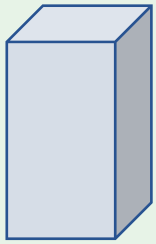
17 გამოთვალე AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (3; 5), ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (–6; 9).

18 გამოთვალე ABC სამკუთხედის AD მედიანის სიგრძე, თუ A წერტილის კოორდინატებია (1; –2), B წერტილის კოორდინატები (–4; 10), ხოლო C წერტილის კოორდინატები (0; –6).

19 გამოთვალე ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (0; 1), B წერტილის კოორდინატები (–2; 2), ხოლო C წერტილის კოორდინატები (–4; 0).

20 კუბის მოცულობა 64 მ^3-ის ტოლია. გამოთვალე კუბის დიაგონალის სიგრძე.

21 მართკუთხა პარალელეპიპედის სიგრძე 4 სმ, სიგანე 3 სმ, ხოლო სიმაღლე 12 სმ-ია. გამოთვალე დიაგონალის სიგრძე.



წყვილებში სამუშაო

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი დადებითია, მაშინ ვექტორებს შორის მახვილი კუთხეა;
ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ მოცემულის შებრუნებული გამონათქვამი;
გააერთიანეთ ეს ორი გამონათქვამი და ჩამოაყალიბეთ ტოლფასობის სახით.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უარყოფითია, მაშინ ვექტორებს შორის ბლაგვი კუთხეა;
ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ მოცემულის შებრუნებული გამონათქვამი;
გააერთიანეთ ეს ორი გამონათქვამი და ჩამოაყალიბეთ ტოლფასობის სახით.

3. მოცემული კოორდინატების მიხედვით გაარკვიეთ, რომელ ორ ვექტორს შორისაა მახვილი კუთხე, რომელ ორს შორის მართი კუთხე და რომელ ორს შორის ბლაგვი კუთხე.

ა) (2; 3) და (–2; 1); ბ) (–3; 0) და (0; 13); გ) ($\sqrt{2}$; -$\sqrt{3}$) და ($\sqrt{8}$; 2).

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №13

1 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=$

ა) 0; ბ) $\vec{0}$; გ) $2\overrightarrow{AB}$; დ) $2\overrightarrow{BA}$.

2 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$

ა) $\overrightarrow{CB}$; ბ) $\overrightarrow{BC}$; გ) $\overrightarrow{BB}$; დ) $\overrightarrow{CC}$.

3 რა კოორდინატები აქვს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს, თუ A წერტილის კოორდინატებია (–1; 13), ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (7; 2,5)?

ა) (7; 15,5); ბ) (–7; 32,5); გ) (6; 15,5); დ) (8; –10,5).

4 თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (24; –7), მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეა:

ა) 31; ბ) 17; გ) 25; დ) 20.

5 $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ და $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლია:

ა) 4; ბ) 5; გ) –5; დ) –4.

6 $\vec{a}(3;-4)$ და $\vec{b}=(-9;12)$ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდეა:

ა) 90°; ბ) 45°; გ) 180°; დ) –90°.

7 $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (–7; 2). წარმოადგინე $\vec{a}$ ვექტორი ორტების საშუალებით.

8 ABC სამკუთხედში AK ბისექტრისაა. წარმოადგინე $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით, თუ AB=5სმ-ს, ხოლო AC=10სმ-ს.

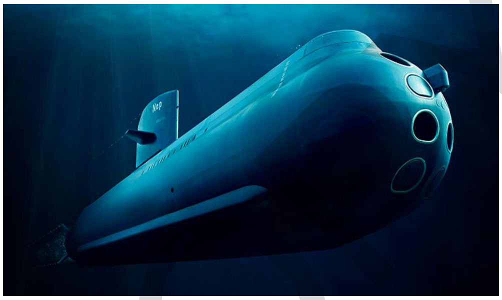
9 გამოთვალე $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$, თუ a=7სმ, b=8სმ.

10 წარმოადგინე $\vec{a}$ (5; –5) ვექტორი $\vec{b}$ (1; 1) და $\vec{c}$ (2; –3) ვექტორების საშუალებით.

6.4 მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

მიზანი

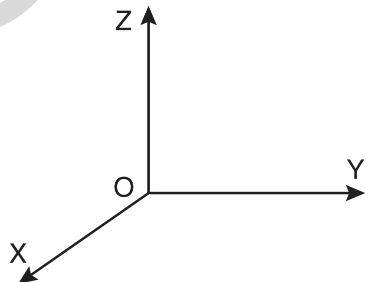
კოორდინატთა სისტემის შემოტანა სივრცეში და წერტილებს შორის მანძილის გაზომვა კოორდინატებში



როგორც ვიცით, სიბრტყეში მოცემული მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა საშუალებას გვაძლევს, სიბრტყის ყოველ წერტილს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი, კოორდინატები, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე.

სივრცის შემთხვევაში ობიექტის მდებარეობის განსასაზღვრად ორი კოორდინატი არაა საკმარისი. მაგალითად, თვითმფრინავის ადგილმდებარეობის განსაზღვრისთვის, გრძედისა და განედის გარდა, საჭიროა ვიცოდეთ, თუ რა სიმაღლეზეა იგი. წყალქვეშა გემის მდებარეობასაც ვერ დავადგენთ მხოლოდ გრძედისა და განედის ცოდნით. დამატებით დაგვჭირდება იმის ცოდნა, თუ რა სიღრმეზე მდებარეობს გემი.

ამ მაგალითებიდან ვასკვნით, რომ სივრცეში მდებარე წერტილის შემთხვევაში გვჭირდება მესამე კოორდინატი, ანუ აბსცისთა და ორდინატთა ღერძების გარდა, საჭიროა მესამე ღერძი, რომელიც მესამე კოორდინატის სიდიდეს განსაზღვრავს. ამისათვის სივრცეში შეგვიძლია ავაგოთ **მართკუთხა კოორდინატთა სიტემა.**



ნახ. 1

სივრცის რომელიმე წერტილი ავიღოთ კოორდინატთა სათავედ (1-ელ ნახაზზე O წერტილი) და ამ წერტილზე გავატაროთ სამი ურთიერთპერპენდიკულარული OX, OY და OZ რიცხვითი ღერძი. ამ სამი ღერძიდან OX და OY აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებია, ხოლო OZ-ს **აპლიკატთა ღერძი** ეწოდება (ალბათ შენიშნე, რომ ნახაზზე ამ ღერძების მხოლოდ არაუარყოფითი ნაწილებია წარმოდგენილი).

სივრცეს, რომელშიც მოცემულია კოორდინატთა სისტემა, **საკოორდინატო სივრცე** ეწოდება. საკოორდინატო სივრცეში გვაქვს სამი ურთიერთპერპენდიკულარული საკოორდინატო სიბრტყე, OXY, OXZ და OYZ. ეს სამი სიბრტყე საკოორდინატო სივრცეს 8 ნაწილად ყოფს (ახსენი, რატომ).

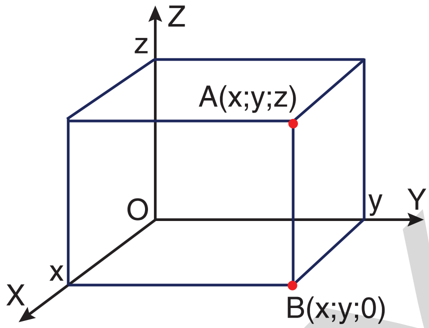
ასე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში სივრცის ყოველ A წერტილს რიცხვთა ერთადერთი (x; y; z) სამეული შეესაბამება, რომელიც შემდეგი წესით შეგვიძლია დავადგინოთ:

A წერტილის 1-ელი კოორდინატის, ანუ აბსცისის, დასადგენად A წერტილზე გავატაროთ OX ღერძის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყისა და OX ღერძის საერთო წერტილის კოორდინატი იქნება A წერტილის აბსცისა. ანალოგიურად მოვიქცევით მეორე და მესამე კოორდინატების დასადგენად.

კოორდინატების დადგენის ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ წერტილი რომელიმე საკოორდინატო სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ იმ ღერძის შესაბამისი კოორდინატი, რომელიც ამ საკოორდინატო სიბრტყის პერპენდიკულარულია, 0-ის ტოლი იქნება. მაგალითად, OXY საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე წერტილების (მეორე ნახაზზე B წერტილი) მესამე

კოორდინატი, ანუ აპლიკატი, ნულის ტოლია, რადგან OXY სიბრტყე OZ ღერძის პერპენდიკულარულია და მათი საერთო წერტილი კოორდინატთა სათავეა.

თუ A წერტილი არცერთ საკოორდინატო სიბრტყეს არ ეკუთვნის, მაშინ მისი კოორდინატების თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად უნდა ავაგოთ მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის დიაგონალია AO მონაკვეთი, ხოლო A წერტილიდან გამოსული წიბოები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია (ნახ. 2).



ნახ. 2

საკოორდინატო სივრცეში ყოველ წერტილს კოორდინატთა ერთადერთი (x; y; z) სამეული შეესაბამება.

პირიქით, რიცხვთა ყოველ (x; y; z) სამეულისთვის არსებობს სივრცის ერთადერთი წერტილი, რომლისთვისაც ეს სამეული კოორდინატებს წარმოადგენს. ამ წერტილის მოსაძებნად ჯერ ერთ-ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე, მაგალითად, OXY-ზე მოვძებნოთ (x; y) კოორდინატების მქონე წერტილი და ამ წერტილიდან გავავლოთ |z| – სიგძის OZ ღერძის თანამიმართული ვექტორი, თუ z>0 და საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორი, თუ z<0. მიღებული ვექტორის წვერო იქნება საძიებელი წერტილი.

ამოცანა 1. დავამტკიცოთ, რომ A(x; y; z) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$AO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1)$$

დამტკიცება. თუ წერტილი რომელიმე საკოორდინატო სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ სათავემდე მანძილის გასაზომად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიბრტყეზე მანძილის გაზომვის წესი. მაგალითად, თუ z=0, მაშინ $AO = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. თუ A წერტილის ყველა კოორდინატი არანულოვანია, მაშინ OA მონაკვეთი წარმოადგენს იმ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალს, რომლის წიბოებია |x|, |y| და |z|. ამიტომ, მისი სიგრძე გამოითვლება (1) ფორმულით.

ვთქვათ, საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია $A(x_1; y_1; z_1)$ და $B(x_2; y_2; z_2)$ წერტილები. გამოვთვალოთ ამ წერტილებს შორის მანძილი. AB მონაკვეთი პარალელურად გადავიტანოთ ისე, რომ A წერტილი დაემთხვეს კოორდინატთა სათავეს. მაშინ, B წერტილის კოორდინატები აღმოჩნდება $(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ და AB მანძილის გამოსათვლელად შეგვიძლია (1) ფორმულის გამოყენება. მივიღებთ:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2)$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რამდენი კოორდინატი აქვს წერტილს საკოორდინატო სიბრტყეზე? საკოორდინატო სივრცეში?
2. რომელი კოორდინატი აქვს ნულის ტოლი საკოორდინატო სივრცის იმ წერტილს, რომელიც OXZ სიბრტყეში მდებარეობს?
3. რომელი კოორდინატი შეიძლება ჰქონდეს არანულოვანი საკოორდინატო სივრცის იმ წერტილს, რომელიც აპლიკატთა ღერძზე მდებარეობს?
4. რომელი საკოორდინატო სიბრტყიდანაა თანაბრად დაშორებული A(x;y;z) და B(x;y;-z) წერტილები?

სავარჯიშოები

1 გაარკვიე, რომელ საკოორდინატო ღერძს ეკუთვნის წერტილი, რომლის კოორდინატებია:

ა) (1; 0; 0); ბ) (0; 0; –1); გ) (2; 0; 0);
დ) (0; –3; 0); ე) (0; 0; 0); ვ) (0; 5; 7).

2 გაარკვიე, რომელ საკოორდინატო სიბრტყეს ეკუთვნის წერტილი, რომლის კოორდინატებია:

ა) (1; 0; –4); ბ) (0; 2; 1); გ) (2; 1; 0);
დ) (0; 3; –7); ე) (0; 3; 0); ვ) (1; 2; 3).

3 იპოვე მანძილი A(x; y; z) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ:

ა) x=3; y=–4; z=12; ბ) x=–3; y=–4; z=0;
გ) x=0; y=–5; z=–12; დ) x=–6; y=8; z=$\sqrt{11}$.

4 იპოვე x, თუ A(x; 6; –8) წერტილი კოორდინატთა სათავიდან 11-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

5 იპოვე მანძილი A(1; 2; 3) და B(3; 2; 1) წერტილებს შორის.

6 იპოვე მანძილი A(3; 0; 0) და B(0; –4; 0) წერტილებს შორის.

7 იპოვე AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ A წერტილის კოორდინატებია (1; –2; 4), ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (4; –6; –8) შორის.

8 იპოვე აბსცისათა ღერძზე მდებარე იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიდან OYZ საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილი 1,1-ის ტოლია.

9 იპოვე ორდინატთა ღერძზე მდებარე იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიდან OXZ საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილი 9-ის ტოლია.

10 იპოვე აპლიკატთა ღერძზე მდებარე იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიდან OXY საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილი 7-ის ტოლია.

11 იპოვე A(1; –2; 3) წერტილიდან მანძილი:

ა) OXY საკოორდინატო სიბრტყემდე;
ბ) OXZ საკოორდინატო სიბრტყემდე;
გ) OYZ საკოორდინატო სიბრტყემდე.

12 იპოვე AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (1; –2; 4),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (3; 2; –6);
ბ) A წერტილის კოორდინატებია (0; –8; 1),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (5; –1; 3);
გ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{2}$; 7; 0),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები –($\sqrt{8}$; 1; 1).

13 იპოვე ABC სამკუთხედის AM მედიანის სიგრძე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 0; 4), B წერტილის კოორდინატები – (5; 2; –6), ხოლო C წერტილის კოორდინატები – (–7; 4, 6);

ბ) A წერტილის კოორდინატებია (1; 2; 3), B წერტილის კოორდინატები – (3; 4; 5), ხოლო C წერტილის კოორდინატები – (–3; –4, –5);

გ) A წერტილის კოორდინატებია $(-\sqrt{2}; 0; 1)$, B წერტილის კოორდინატები – (0; 1; –3), ხოლო C წერტილის კოორდინატები – $(\sqrt{18}; 1; 1)$.

14 დახაზე $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი, რომლის A წვეროს კოორდინატებია (0; 0; 0), B წვერის კოორდინატები – (1; 0; 0), D წვეროს კოორდინატები – (0; 1; 0), ხოლო A_1 წვეროს კოორდინატები (0; 0; 1). იპოვე დანარჩენ წვეროთა კოორდინატები.

15 იპოვე მანძილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 0; 4), B წერტილის კოორდინატები – (5; 2; –6), ხოლო C წერტილის კოორდინატები – (–7; 4, 6);

ბ) A წერტილის კოორდინატებია (1; 2; 3), B წერტილის კოორდინატები – (3; 4; 5), ხოლო C წერტილის კოორდინატები – (–3; –4, –5);

გ) A წერტილის კოორდინატებია $(-\sqrt{2}; 0; 1)$, B წერტილის კოორდინატები – (0; 1; –3), ხოლო C წერტილის კოორდინატები – $(\sqrt{18}; 1; 1)$.

16 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის A წვეროს კოორდინატებია (0; 0; 0), B წვერის კოორდინატები – (3; 0; 0), D წვეროს კოორდინატები – (0; 4; 0), ხოლო A_1 წვეროს კოორდინატები (0; 0; 5). იპოვე დანარჩენ წვეროთა კოორდინატები.

17 საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(7; –2) და B(4; 1) წერტილები. იპოვე $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორთა კოორდინატები.

18 მოცემულია $\vec{a}(1;-2)$ და $\vec{b}(3;5)$ ვექტორები. გამოთვალე:

ა) $3\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები;

ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე;

გ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

შესაძლებელია თუ არა?

რომ საკოორდინატო სივრცის სამ წერტილს ისე შევურჩიოთ კოორდინატები, რომ ისინი ერთ სიბრტყეში არ აღმოჩნდეს? ოთხ წერტილს?

6.5 ვექტორები სივრცეში

მიზანი

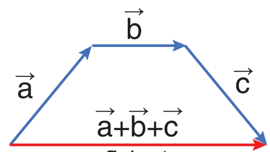
სამგანზომილებიან ვექტორებზე მოქმედებების კოორდინატებით გამოსახვა

ვექტორები სივრცეში ისევე განიმარტება, როგორც სიბრტყის შემთხვევაში. კერძოდ, სივრცის შემთხვევაშიც ვექტორი მიმართულების მქონე მონაკვეთია და ისრით აღვნიშნავთ. ამ ისრის სიგრძე ვექტორის სიგრძეს, ხოლო მიმართულება ვექტორის მიმართულებას გვიჩვენებს. იმის გამო, რომ სივრცის ნებისმიერი ორი ვექტორი შეგვიძლია ერთ სიბრტყეში მოვათავსოთ (ახსენი, რატომ), მათი ჯამი და რიცხვზე ნამრავლი ისევე განიმარტება და ისეთივე თვისებები აქვთ, როგორიც სიბრტყის შემთხვევაში ჰქონდათ. კერძოდ:

ა) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; ბ) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$;

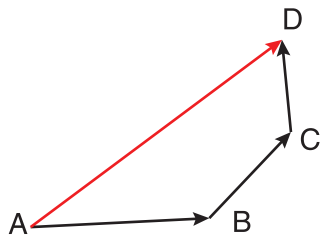
გ) $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$; დ) $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\alpha$.

ორი ვექტორის შესაკრებად, როგორც ვიცით, ვიყენებთ სამკუთხედის ან პარალელოგრამის წესს. უფრო მეტი რაოდენობის ვექტორების შესაკრებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ე.წ. მრავალკუთხედის წესი. მაგალითად, $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შესაკრებად შეგვიძლია მოვიქცეთ ასე: $\vec{b}$ ვექტორის სათავე მოვდოთ $\vec{a}$ ვექტორის წვეროს, ხოლო $\vec{c}$ ვექტორის სათავე – $\vec{b}$ ვექტორის წვეროს (ნახ. 1). მაშინ, $\vec{a}$ ვექტორის სათავე იქნება ამ სამი ვეტორის ჯამის სათავე, ხოლო $\vec{c}$ ვექტორის წვერო – ჯამის წვერო.



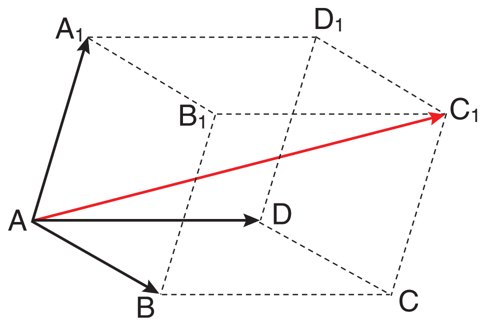
ნახ. 1

ვექტორების შეკრების აღნიშნული წესით შეგვიძლია ვისარგებლოთ როგორც იმ ვექტორებისთვის, რომლებიც ერთ სიბრტყეში თავსდება (ასეთ სამ ვექტორს **კომპლანარული ვექტორები** ეწოდება), ისე იმ ვექტორებისთვის, რომელთა ერთ სიბრტყეში მოთავსება შეუძლებელია (ანუ **არაკომპლანარული** ვექტორებისათვის). მე-2 ნახაზზე მრავალკუთხედის წესით შეკრებილია $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{CD}$ არაკომპლანარული ვექტორები. შეკრების შედეგად მიღებულია $\overrightarrow{AD}$ ვექტორი.



ნახ. 2

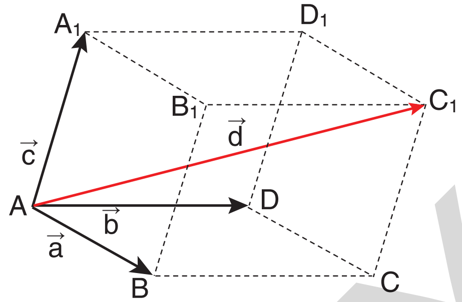
არსებობს არაკომპლანარული ვექტორების შეკრების პარალელეპიპედის წესი, რომელიც არაკოლინეარული ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის სივრცული ანალოგია. ამ შემთხვევაში სამივე შესაკრები უნდა მოვდოთ სივრცის ერთ წერტილში, ამ ვექტორებზე, როგორც საერთო წვეროს მქონე წიბოებზე, ავაგოთ პარალელეპიპედი და ამ საერთო წვეროდან გავავლოთ ვექტორი პარალელეპიპედის მოპირდაპირე წვერომდე. მე-3 ნახაზის მიხედვით:



ნახ. 3

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}.$$

თუ იმავე ვექტორებს მრავალკუთხედის წესით შევკრებთ, მაგალითად, ასე: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$, იმავე $\overrightarrow{AC_1}$ ვექტორს მივიღებთ.



ნახ. 4

ვიცით, რომ ორი არაკოლინეარული ვექტორით იმავე სიბრტყეში მოცემული ნებისმიერი ვექტორის გამოსახვაა შესაძლებელი. სივრცის შემთხვევაში ამ ფაქტის ანალოგიურია შემდეგი

თეორემა. სამი არაკომპლანარული ვექტორით შეგვიძლია სივრცეში მოცემული ნებისმიერი ვექტორის წარმოდგენა.

მართლაც, ვთქვათ, $\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია, ხოლო $\vec{d}$ ნებისმიერი ვექტორია სივრცეში.

ოთხივე ვექტორი მოვდოთ ერთ წერტილში (მე-4 ნახაზზე A წერტილი). თუ $\vec{d}$ ვექტორი აღმოჩნდა მოცემული სამეულიდან რომელიმე ორის სიბრტყეში, მაშინ ის წარმოდგება ორი არაკოლინეარული ვექტორის ჯამად, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, არაკოლინეარული ვექტორების შეკრების წესის თანახმად გვექნება (დააკვირდი მე-4 ნახაზს):

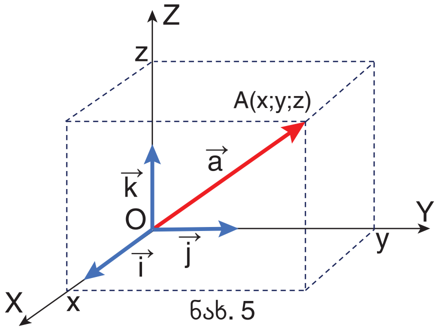
$$\vec{d}=\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},$$

სადაც α, β და γ ნამდვილი რიცხვებია.

საკოორდინატო სივრცეში მოცემული $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატების დასადგენად, სიბრტყის შემთხვევის ანალოგიურად, ეს ვექტორი კოორდინატთა სათავეში უნდა მოვდოთ და მისი წვეროს კოორდინატები ვიპოვოთ. გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში ყოველ ვექტორს სამი კოორდინატი ექნება. თუ A წერტილის კოორდინატებია $(x_1; y_1; z_1)$, ხოლო B წერტილის კოორდინატები – $(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$.

$(x;y;z)$ კოორდინატების მქონე ვექტორის სიგრძე 4.4 პარაგრაფის 1-ელი ფორმულით, ხოლო $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე იმავე პარაგრაფის მე-2 ფორმულით გამოითვლება.

სიბრტყის შემთხვევაში გვქონდა ორი ორტი $\vec{i}(1;0)$ და $\vec{j}(1;0)$. სივრცის შემთხვევაში კი გვაქვს სამი ორტი: $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ და $\vec{k}(0;0;1)$. ეს სამეული არაკომპლანარულ ვექტორთა სამეულს წარმოადგენს (ახსენი, რატომ). დამტკიცებული თეორემის ძალით ნებისმიერი $\vec{a}(x;y;z)$ ვექტორი შეგვიძლია ორტების საშუალებით წარმოვადგინოთ (ნახ.5): $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.



ნახ. 5

ანალოგიურად განიმარტება და იგივე თვისებები აქვს სკალარულ ნამრავლსაც:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha,$$

სადაც α კუთხეა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

სიბრტყის შემთხვევის ანალოგიურია, აგრეთვე, სამგანზომილებიან ვექტორებზე მოქმედებების გამოსახვა კოორდინატებში. კერძოდ, თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_1; y_1; z_1)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – $(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ:

- $\vec{a}+\vec{b}$ ჯამის კოორდინატები იქნება $(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$;

- $\vec{a}$ ვექტორის p რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატებია $(px_1; py_1; pz_1)$;
- $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3,$$

- $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე გამოითვლება ფორმულით:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}\right).$$

უპასუხე კითხვებს:

1. ვექტორთა როგორ ერთობლიობას ეწოდება კომპლანარული ვექტორები?
2. რას ეწოდება ვექტორის კოორდინატები?
3. როგორ გამოითვლი ვექტორის სიგრძეს კოორდინატებით?
4. რას უდრის იმ ორ არანულოვან ვექტორს შორის კუთხე, რომელთა სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია?
5. რის ტოლია ვექტორის სკალარული კვადრატი?

სავარჯიშოები

1 იპოვე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 3; 7),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (–3; 2; 1);
ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–6; 0; 5),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (0; 1; –8);
გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,5; 0; 1),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (1; –3,2);
დ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{27}$; 1),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – ($\sqrt{12}$; –1).

2 გამოთვალე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 2; 0),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (3; 5; –12);
ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–5; 7; 0),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (0; 7; 12);
გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,1; 0; 2),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – (2,1; 3; 4);
დ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{2}$; 1; 2),
ხოლო B წერტილის კოორდინატები – ($\sqrt{8}$; 1; 2).

3 გამოთვალე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ მისი კოორდინატებია:

ა) (0; 5; 0); ბ) (0; –5; 0); გ) (–3; 3; $\sqrt{7}$);
დ) (15; 0; –8); ე) (1; –2; 2;); ვ) (cos1; $\sqrt{3}$; sin1).

4 წარმოადგინე ორტების საშუალებით $\vec{a}$ ვექტორი, თუ მისი კოორდინატებია:

ა) (2; 0; 2); ბ) (1; 1; –1); გ) (–1; 2; –1); დ) (–4; 8; 2);
ე) (0; 0,5; –2); ვ) (0; 1; 0); ზ) (0; 1; 1).

5 დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; ბ) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$; გ) $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}$; დ) $\vec{a}=2\vec{j}+3\vec{k}$; ე) $\vec{a}=-7\vec{i}$.

6 დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$; ბ) $\vec{a}=\vec{i}+12\vec{j}-\vec{k}$; გ) $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$;

დ) $\vec{a}=1,2\vec{j}$; ე) $\vec{a}=-2\vec{i}$; ვ) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$.

7 $\vec{a}$ ვექტორის კოოერდინატებია (1; –4; 3).

იპოვე: ა) $-\vec{a}$; ბ) $2\vec{a}$; გ) $-3\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები.

8 გამოთვალე $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (0; 5; –7;),
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (–4; 3; 6);

ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (3; –0,5; 1),
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (–1; 2; 5);

გ) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$, ხოლო $\vec{b}=-5\vec{j}+\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია;

დ) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, ხოლო $\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$,
სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

9 საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია ოთხი წერტილი: A(2; 2; 1), B(0; 8; 2), C(1; 0; 4) და D(5; 7; –1). გამოთვალე $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატები.

10 გამოთვალე $2\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (0; 7; –4),
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (–2; 0; 1);

ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (–3; 1; 4),
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (3; 1; 2);

გ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია ($\sin\alpha$; 0; 1),
ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (0; $2\cos\alpha$; –2);

დ) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, ხოლო $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

11 საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია ოთხი წერტილი: A(2; 0; 1), B(8; –3; 0), C(0; 4; 4) და D(5; 0; 1). გამოთვალე $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

12 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

ა) a=3 სმ, b=7 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 60°;
ბ) a=4 სმ, b=3 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 45°;

გ) a=8 სმ, b=13 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 120°;
დ) a=0,15 სმ, b=1,29 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 90°.

13 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (4; 1; 3) და (–2; 9; 0); ბ) (1; –3; 1) და (0; 1; 3);
გ) $(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 6)$ და $(\sqrt{8}; 0; 1)$; დ) $(\sqrt{27}; -1; 4)$ და $(\sqrt{3}; 6; 0)$.

14 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (3; 4; 12) და (–3; 4,–12); ბ) (–12; 5; 0) და (0; 5; 12);
გ) (6; –8; 0) და (8; 0; 6); დ) (15; 8; 0) და (0; 8; 15).

15 გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (–3; 4; 1) და (3; –4; –1); ბ) (2; –5; 7) და (4; –10; 14);
გ) (1; –6; 0) და (–3; 18; 0); დ) $(\sqrt{3};0;1)$ და $(1;0;\sqrt{3})$.

16 იპოვე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ:

ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, ხოლო a·b=8; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{5}$, ხოლო $a\cdot b=\sqrt{10}$;
გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$, ხოლო a·b=–4.

17 მოცემული კოორდინატების მიხედვით დაადგინე, მახვილია, მართია თუ ბლაგვი ვექტორებს შორის კუთხე:

ა) (1; 6; –5) და (2; –2; 1); ბ) (–10; –5; 4) და (0; –3; –1);
გ) (9; –1; 12) და (8; 7; –2); დ) (11; 12; 9) და (–1; –2; –3).

18 იპოვე x, თუ ვექტორები კოორდინატებით (1; x; –1) და $(x^2; -4; -4)$ ურთიერთმართობული ვექტორებია.

19 იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; 0; –1), ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები (1; 2; 2).

20 $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; 2; –1), $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები – (0; –7; 5). იპოვე $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორზე სკალარული ნამრავლი.

21 $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეა 5 სმ, $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე 4 სმ, ხოლო ამ ვექტორებს შორის კუთხე 60°. იპოვე $\vec{a}-2\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

22 იპოვე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძეა 52 სმ, ხოლო $\vec{a}$ ვექტორის

ა) თანამიმართული ვექტორის კოორდინატებია (12; –3; 4);
ბ) საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორის კოორდინატებია (–6; 8; 24).

23 იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –3; –1), ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები (1; 0; –2).

24 გამოთვალე $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, თუ AB=13, BC=14 და AC=15.

25 იპოვე (1; x–1; 2-x) კოორდინატების მქონე ვექტორის შესაძლო უმცირესი სიგრძე.

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №14

1 $(3;-3;1)$ კოორდინატების მქონე წერტილიდან OXZ საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილია:

ა) 3; ბ) –3; გ) 1; დ) 19.

2 იპოვე AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ A წერტილის კოორდინატებია $(-3;4;5)$, B წერტილის კოორდინატები – $(3;4;-3)$.

ა) 10; ბ) 16; გ) 49; დ) 15.

3 იპოვე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია $(-31;11;-13)$, B წერილის კოორდინატები – $(-23;17;-4)$.

ა) $(-52;28;-17)$; ბ)$(-8;6;-17)$; გ) $(8;6;9)$; დ) $(-8;-6;9)$.

4 $\vec{a}(3;-4;0)$ ვექტორის სიგრძეა:

ა) 1; ბ) 7; გ) 25; დ) 5.

5 დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

ა) $(\vec{i};2\vec{j};-4\vec{k})$; ბ) $(1;2;-4)$; გ) $(0;2;-4)$; დ) $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

6 რომელია $\vec{a}(1;-1;2)$ ვექტორის თანამიმართული ვექტორი?

ა) $\vec{b}(-1;1;-2)$; ბ) $\vec{b}(3;-3;6)$; გ) $\vec{b}(2;-1;1)$; დ) $\vec{b}(2;-2;1)$.

7 გამოთვალე $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, ხოლო $\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

8 იპოვე x და y თუ $\vec{a}(x;4;7)$ და $\vec{b}(1;y;-14)$ კოლინეარული ვექტორებია.

9 გამოთვალე $\vec{a}(-3;0;-4)$ და $\vec{b}(0;5;-12)$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

10 გამოთვალე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლია –12, ხოლო ABC სამკუთხედის B კუთხის კოსინუსი 0,6-ის ტოლია.

აბა, სცადე!

სკალარული ნამრავლის გამოყენებით დაამტკიცე წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი.

შესაძლებელია თუ არა,

რომ სამი არაკომპლანარული ვექტორიდან ორი ვექტორი იყოს კოლინეალური?

თავი 7. სტატისტიკა და ალბათობა

ამ თავში ისწავლი:

- ❖ მონაცემთა ერთობლიობის რაოდენობრივ და თვისობრივ ნიშნებს: ტიპურ და გამორჩეულ მონაცემებს;
- ❖ დაგროვილი სიხშირისა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირის ცნებებს;
- ❖ მონაცემთა პოზიციის მახასიათებელ სიდიდეს – რანგს;
- ❖ მონაცემთა გაფანტულობის მახასიათებელ სიდიდეს – სტანდარტულ გადახრას;
- ❖ პირობით ალბათობას;
- ❖ პირობითი ალბათობის ხდომილობათა ნამრავლისა და ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოსათვლელად გამოყენებას.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- ❖ ტიპური და გამორჩეული მონაცემების მოძიებასა და დახასიათებას;
- ❖ მონაცემთა რანგის დადგენას;
- ❖ მოცემული სიხშირული ცხრილის მიხედვით დაგროვილი სიხშირისა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირის ცხრილების შედგენას და მათი დიაგრამების აგებას;
- ❖ მონაცემის რანგის დადგენას;
- ❖ მონაცემთა გაფანტულობის გაზომვას და მონაცემთა სტაბილურობის შეფასებას;
- ❖ პირობითი ალბათობის გამოთვლას და ხდომილობათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელად გამოყენებას;
- ❖ ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებას.

ქრისტიან ჰიუგენსი
1629-1695 წწ.
ნიდერლანდელი მეცნიერი, ალბათობის თეორიისადმი მიძღვნილი პირველი წიგნის ავტორი

კომპლექსური დავალება
„პირობითი ალბათობის სტატისტიკური ანალიზი"

საკვანძო ცნებები: ალბათობა, სტატისტიკა.

ამა თუ იმ მოვლენის სტატისტიკური ანალიზისთვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს, თუ რა გარემოში, რა პირობებში ან/და რა პოპულაციაში მოიპოვება მონაცემები. მაგალითად, იმის გასარკვევად, მოსახლეობის რამდენი პროცენტია გატაცებული ფეხბურთით, საფეხბურთო სტადიონზე მაყურებლებს შორის ჩატარებული გამოკითხვა და ქუჩაში ჩატარებული გამოკითხვა სხვადასხვა შედეგს მოგვცემს; სხვადასხვა შედეგს მოგვცემს მთავრობის მიერ გატარებული ამა თუ იმ რეფორმის შესახებ გამოკითხვა მმართველ და ოპოზიციურ პარტიებში და ა.შ.

ანალოგიური სიტუაცია წარმოიშობა ხდომილობის ალბათობის გამოთვლის დროს იმის მიხედვით, თუ ხდომილობათა სივრცედ რა სიმრავლეს ავიღებთ. მაგალითად, იმის გასარკვევად, თუ რის ტოლია მონეტის ორჯერ აგდების დროს ორივეჯერ გერბის მოსვლა, დამოკიდებულია ხდომილობათა სივრცეზე: თუ ხდომილობათა სივრცედ ცდის ყველა შედეგს ავიღებთ, ალბათობა 0,25-ის ტოლი იქნება, თუ სივრცეს შევზღუდავთ იმ პირობით, რომ პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, მაშინ ალბათობა 0,5-ის ტოლი იქნება, ხოლო თუ პირობად გვექნება, რომ ერთ-ერთი აგდებისას მოვიდა გერბი, მაშინ – $\frac{1}{3}$-ის ტოლი.

შენი დავალება.

1. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 2-ბავშვიან ოჯახში:

ა) ორივე ბავშვი გოგონაა;

ბ) ორივე ბავშვი გოგონაა, თუ ცნობილია, რომ პირველი ბავშვი გოგონაა;

გ) ორივე ბავშვი გოგონაა, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი ბავშვი გოგონაა;

დ) ერთი ბავშვი ბიჭია, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი ბავშვი გოგონაა.

2. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 3-ბავშვიან ოჯახში, რომელშიც ერთი-ერთი ბავშვი გოგონაა,

ა) დანარჩენი ორი ბავშვიც გოგონაა;

ბ) დანარჩენი ორი ბავშვი ბიჭია.

3. ამოხსენი ანალოგიური ამოცანები, რომლებშიც გოგონებს ჩაანაცვლებ ბიჭებით და პირიქით – ბიჭებს გოგონებით.

შენიშვნა. ამოცანებში იგულისხმება, რომ ბიჭისა და გოგოს დაბადება ტოლად მოსალოდნელი ხდომილობებია.

4. ჩაატარე გამოკითხვა შენს თანაკლასელებში ან/და შენთვის ხელმისაწვდომ სხვა პოპულციაში 2-ბავშვიან და 3-ბავშვიან ოჯახებში ბავშვთა შემადგენლობის შესახებ. დააჯგუფე რესპონდენტი გოგონებისა და ბიჭების პასუხები ცალ-ცალკე და გამოიკვლიე, რამდენად ახლოსაა შენ მიერ თეორიულად დადგენილი კანონზომიერებები რეალობასთან.

5. ნაშრომი წარმოადგინე პრეზენტაციის სახით, რომელშიც ხაზგასმით წარმოაჩენ:

- ერთი შეხედვით, ტოლადმოსალოდნელ ხდომილობებს რატომ აქვთ არატოლი ალბათობები;
- რა ფაქტებისა და მეთოდების ცოდნა დაგეხმარა დავალების შესრულებაში;
- როგორ დაადგინე ხდომილობათა ალბათობები;
- როგორ გამოიყენე პირობითი ალბათობის ცოდნა;
- გამოიყენე თუ არა ალბათობის კლასიკური განმარტება;
- როგორ შეადგინე კითხვარი;
- როგორ ჩაატარე სტატისტიკური ანალიზი;
- რა დასკვნა გამოიტანე ჩატარებული სამუშაოდან.

7.1 ტიპური და ექსტრემალური მონაცემები

მიზანი

მონაცემთა ერთობლიობის რაოდენობრივი და თვისობრივი ნიშნების მახასიათებლების დადგენა

მონაცემთა ამა თუ იმ ერთობლიობაში ზოგჯერ გვხვდება ისეთი მონაცემი, რომელიც მკვეთრად განხვავდება დანარჩენებისგან. საერთო სურათიდან ასეთ „ამოვარდნილ" მონაცემს **ექსტრემალური მონაცემი** ეწოდება.

განვიხილოთ მაგალითი:

მაგალითი 1. ცხრილში მოცემულია საჩუქრების მაღაზიის თვიური ნავაჭრის მოცულობა ლარებში, წლის ბოლო ორი კვარტლის განმავლობაში.

თვე	მოცულობა
ივლისი	93 034
აგვისტო	102 366
სექტემბერი	123 451
ოქტომბერი	98 319
ნოემბერი	109 115
დეკემბერი	482 015

როგორც ცხრილიდან ჩანს, დეკემბრის მონაცემი მკვეთრად განსხვავდება დანარჩენი ე.წ. **ტიპური** მონაცემისაგან. ე.ი. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ექსტრემალურ მონაცემს.

ექსტრემალური მონაცემი არღვევს საერთო სურათს. თუ ჩვენ დავითვლით მონაცემთა საშუალოს ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით და მის გარეშე, დავინახავთ, რომ მათ შორის იქნება არსებითი განსხვავება. მართლაც, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით საშუალო იქნება:

$$(93034+102366+123451+98319+109115+482015):6=168050,$$

ხოლო მის გარეშე:

$$(93034+102366+123451+98319+109115):5=105257.$$

ბოლოს მიღებული საშუალო – 105257 უფრო რეალურად ასახავს მაღაზიის ყოველთვიურ ტიპურ ნავაჭრს, ვიდრე 168050, რადგან მონაცემთა უმრავლესობა ამ რიცხვის მახლობლობაში მდებარეობს.

ექსტრემალური მონაცემების არსებობის შემთხვევაში საშუალოზე უკეთეს სურათს გვაძლევს მედიანა. საქმე ისაა, რომ მედიანა ნაკლებადაა დამოკიდებული ექსტრემალურ მონაცემებზე, რადგან ის მხოლოდ შუა მონაცემს გვიჩვენებს. ზემოთ განხილული მაგალითის შემთხვევაში მედიანა, იმის გამო, რომ მონაცემთა ლუწი რაოდენობაა, შუა ორი მონაცემის საშუალოა:

$$(102366+109\ 115):2=105740,5,$$

რაც, როგორც ვხედავთ, მცირედით განსხვავდება ექტრემალური მონაცემის გარეშე გამოთვლილი საშუალოსგან. მცირედით განსხვავებულ მედიანას მივიღებთ იმ შემთხვევაშიც თუ ექსტრემალურ მონაცემს საერთოდ არ გავითვალისწინებთ. ამ შემთხვევაში მედიანა შუა მონაცემის, ანუ 102 366-ის ტოლი აღმოჩნდება.

მონაცემთა რიცხვით მახასიათებლებში მნიშვნელოვანია ისეთი მაჩვენებლები, რომლებიც მონაცემთა გაფანტულობას ზომავს. ასეთია, მაგალითად, გაბნევის დიაპაზონი. მაგრამ ეს მახასიათებელი მწირ ინფორმაციას იძლევა, რადგან მხოლოდ ორ, უდიდეს და უმცირეს მონაცემს ითვალისწინებს და მათი სხვაობით გამოითვლება. უფრო ზუსტი ინფორმაციის მისაღებად იმის შესახებ, თუ რამდენად სტაბილურია რიცხვითი მონაცემები, იყენებენ ე.წ. **სტანდარტულ გადახრას.** განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 2. ცხრილში მოცემულია თბილისსა და ქუთაისში ჰაერის მაქსიმალური ტემპერატურა 2022 წლის 21-25 დეკემბრის მონაცემებით:

ქალაქი	21	22	23	24	25
თბილისი	3°	5°	7°	9°	11°
ქუთაისი	10°	11°	14°	12°	13°

გვაინტერესებს, მოცემული 5 დღის განმავლობაში თბილისში უფრო სტაბილური იყო ამინდი თუ ქუთაისში.

თბილისის შემთხვევაში გაბნევის დიაპაზონია $11^\circ - 3^\circ = 8^\circ$, ხოლო ქუთაისის შემთხვევაში – $14^\circ - 10^\circ = 4^\circ$. თუ ამ ორ მაჩვენებელს შევადარებთ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ქუთაისში ტემპერატურა იცვლებოდა ნაკლები ამპლიტუდით, ვიდრე თბილისში.

გამოვთავლოთ სტანდარტული გადახრა. გამოთვლა 4 ეტაპისაგან შედგება:

1-ელი ეტაპი. გამოვთვალოთ მონაცემთა საშუალო:

თბილისი: $(3^\circ + 5^\circ + 7^\circ + 9^\circ + 11^\circ) : 5 = 7^\circ$;

ქუთაისი: $(10^\circ + 11^\circ + 14^\circ + 12^\circ + 13^\circ) : 5 = 12^\circ$.

მე-2 ეტაპი: გამოვთვალოთ თითოეული მონაცემის საშუალოდან გადახრის კვადრატი:

თბილისი: $(7–3)^2=16$, $(7–5)^2=4$; $(7–7)^2=0$, $(7–9)^2=4$, $(7–11)^2=16$;

ქუთაისი: $(12–10)^2=4$, $(12–11)^2=1$; $(12–14)^2=4$, $(12–12)^2=0$, $(12–13)^2=1$;

მე-3 ეტაპი: გამოვთვალოთ მიღებული რიცხვების საშუალო:

თბილისი: (16+4+0+4+16):5=8; ქუთაისი: (4+1+4+0+1):5=2.

მიღებულ რიცხვებს მონაცემთა **დისპერსია** ეწოდება და σ^2 სიმბოლოთი აღინიშნება (σ -ბერძნული ანბანის ასოა, იკითხება, როგორც „სიგმა“).

მე-4 ეტაპი: მიღებული რიცხვიდან ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი:

თბილისი: $\sigma = \sqrt{8} \approx 2,8$; ქუთაისი: $\sigma = \sqrt{2} \approx 1,4$.

სტანდარტული გადახრის მიღებული პასუხებიდან ჩანს, რომ 5 დღის განმავლობაში ტემპერატურის სტანდარტული გადახრა თბილისში 2-ჯერ აღემატებოდა იმავე მახასიათებელს ქუთაისში. აქედან შეგვიძლია და დავასკვნათ, რომ მოცემულ დღეებში ქუთაისში უფრო სტაბილური ამინდი იყო, ვიდრე – თბილისში.

მოვიყვანოთ სტანდარტული გადახრის ფორმულა: თუ გვაქვს $a_1, a_2, \ldots a_n$ რიცხვითი მონაცემები, მაშინ ამ მონაცემთა სტანდარტული გადახრაა

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a_{\text{საშ}})^2 + (a_2 - a_{\text{საშ}})^2 + \ldots + (a_n - a_{\text{საშ}})^2}{n}}.$$

უპასუხე კითხვებს:

1. მონაცემთა როგორ მნიშვნელობებს ეწოდება ექსტრემალური? ტიპური?
2. რომელი რიცხვითი მახასიათებლით მოიცემა ტიპური შედეგი ექსტრემალური მონაცემის არსებობის შემთხვევაში?
3. რას გვიჩვენებს მონაცემთა დიაპაზონი? სტანდარტული გადახრა?
4. რა კავშირია დისპერსიასა და სტანდარტულ გადახრას შორის?

სავარჯიშოები

1

მონაცემთა მწკრივში იპოვე ექსტრემალური მონაცემები:

ა) –1 –0,2 1 –1,5 0,75 –2 1,3 –17 0,13;

ბ) 2მმ 12სმ 10სმ 9სმ 11სმ 14სმ 0,1მ 13სმ 2მ;

გ) 20გ 11გ 17გ 14გ 25მგ 8გ 2კგ 35გ 27გ;

დ) 20მ² 9მ² 11მ² 10მ² 0,1ჰა 21მ² 7მ² 9მ² 19მ².

2

გამოთვალე მონაცემთა საშუალო და მედიანა ექსტრემალური მონაცემების ჩათვლით და მათ გარეშე:

ა) –3 1 2 –1 4 1 –2 –4 3 –21;

ბ) 2გ 1გ 7გ 4გ 70გ 9გ 12გ 5გ 8გ 0გ.

3

ცხრილში მოცემულია ერთი ფირმის თანამშრომელთა ხელფასის ნუსხა. ცხრილის მიხედვით გაარკვიე, რომელი მონაცემებია ექსტრემალური. გამოთვალე საშუალო და მედიანა ექსტრემალური მონაცემების ჩათვლით და მის გარეშე. გაარკვიე, გამოთვლილთაგან რომელი მახასიათებელი შეიძლება ჩავთვალოთ ტიპურ მაჩვენებლად.

თანამშრომლების სია	ხელფასი ლარებში
დირექტორი	11000
მთავარი ინჟინერი	3800
ბუღალტერი	3700
დიზაინერი	3500
საამქროს უფროსი	3000
მექანიკოსი	2800
ხარატი	2200
დურგალი	2200
შემდუღებელი	2200
დარაჯი	600

4

ცხრილში მოცემულია ბათუმსა და თელავში ჰაერის მაქსიმალური ტემპერატურა 2022 წლის 21-25 დეკემბრის მონაცემებით:

ქალაქი	21	22	23	24	25
ბათუმი	11°	13°	15°	12°	14°
თელავი	2°	4°	5°	6°	8°

ცხრილის მიხედვით გამოთვალე ტემპერატურის გაბნევის დიაპაზონი და სტანდარტული გადახრა ბათუმსა და თელავში. რომელ ქალაქში უფრო სტაბილურია ამინდი?

5

ცხრილში მოცემულია ყაზბეგის რაიონის 10 სოფლის მოსახლეობის რაოდენობა 2014 წლის აღწერით. გამოთვალე მონაცემთა დიაპაზონი და სტანდარტული გადახრა.

სოფელი	მოსახლეობა
არშა	440
აჩხოტი	167
ახალციხე	35
გარბანი	329
კარკუჩა	50
სიონი	325
სნო	263
ყანობი	86
ცდო	17
ჯუთა	26


სოფელი ჯუთა

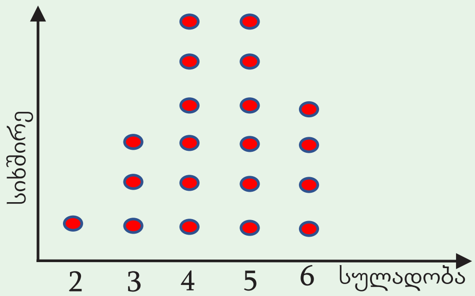
6 ცხრილში მოცემულია სალომეს მიერ სემესტრის განმავლობაში მათემატიკაში, ისტორიასა და ბიოლოგიაში მიღებული შეფასებები სემესტრის მანძილზე. ცხრილის მიხედვით გამოთვალე თითოეული საგნის მონაცემთა საშუალო, მედიანა, დიაპაზონი და სტანდარტული გადახრა. დაადგინე, რომელი საგნის მონაცემებში არის ექსტრემალური მონაცემი, რომელ საგანს სწავლობს სალომე უკეთესად და რომელ საგანში აქვს სტაბილური შეფასებები.

მათემატიკა	7	3	9	8	10
ბიოლოგია	7	8	7	8	7
ისტორია	8	9	8	9	10

7 გიას მიერ შედგენილ დიაგრამაზე მოცემულია მის მიერ ჩატარებული თანაკლასელთა გამოკითხვის შედეგები ოჯახში სულთა რაოდენობის შესახებ. დიაგრამის მიხედვით გამოთვალე:

ა) ოჯახში სულთა საშუალო რაოდენობა გიას კლასში;

ბ) მონაცემთა სტანდარტული გადახრა.



8 ერთ-ერთი სამშენებლო ფირმის თანამშრომელთა ასაკი ვარიაციული მწკრივის სახითაა მოცემული:

21 21 22 23 24 24 25 28 30 33
33 35 36 36 40 40 42 42 45 45

დაყავი მონაცემები (20; 25], (25; 30], (30;35], (35; 40], (40; 45] ინტერვალებად და ააგე ჰისტოგრამა.

7.2 დაგროვილი სიხშირე და მონაცემთა რანგი

მიზანი

მონაცემთა რიცხვითი მახასიათებლების „დაგროვილი სიხშირის“ და „რანგის“ განმარტება და მონაცემთა გამოსაკვლევად გამოყენება

მაგალითი 1. ცხრილში მოცემულია მე-11 კლასის 10 მოსწავლის შედეგი 100 მეტრზე სირბილში.

სახელი	ალეკო	ანა	ბესო	გია	დემნა	ელენე	ზაზა	თათია	კატო	შიო
დრო (წმ)	14,2	16,5	13,5	15,0	13,8	14,6	16,1	17,0	17,3	12,9

დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით:

12,9 13,5 13,8 14,2 14,6 15,0 16,1 16,5 17,0 17,3

საინტერესოა დავადგინოთ იმ მოსწავლეთა რაოდენობა, რომელთა შედეგი არ აღემატება მოცემულ n წამს. მაგალითად, $n=13$ წამს არ აღემატება ერთი შედეგი 12,9, $n=14$ წამს – სამი შედეგი: 12,9, 13,5 და 13,8 და ა.შ. თუ n-ს 1-ის ტოლი ბიჯით გავზრდით, მივიღებთ შემდეგ მიმდევრობას:

1, 3, 6, 6, 9, 10.

მიღებული მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრის მისაღებად წინა წევრს ემატება მომდევნო ინტერვალში მოთავსებული მონაცემთა რაოდენობა ანუ მონაცემთა სიხშირე. ამ მიმდევრობის წევრებს **დაგროვილი სიხშირეები** ეწოდება. ბოლო დაგროვილი სიხშირე 10-ის ანუ მონაცემთა მთლიანი რაოდენობის ტოლია.

თუ დაგროვილ სიხშირეებს მონაცემთა მთლიან რაოდენობაზე, ანუ 10-ზე გავყოფთ, მივიღებთ **დაგროვილ ფარდობით სიხშირეებს:**

0,1, 0,3, 0,6, 0,6, 0,9, 1.

დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე შეგვიძლია პროცენტებში ჩავწეროთ:

10%; 30%; 60%; 60%; 90%; 100%.

თვალსაჩინოებისთვის დაგროვილი სიხშირეებისა და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეებისთვის შევადგინოთ ცხრილი:

დრო	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
13	1	10%
14	3	30%
15	6	60%
16	6	60%
17	9	90%
18	10	100%

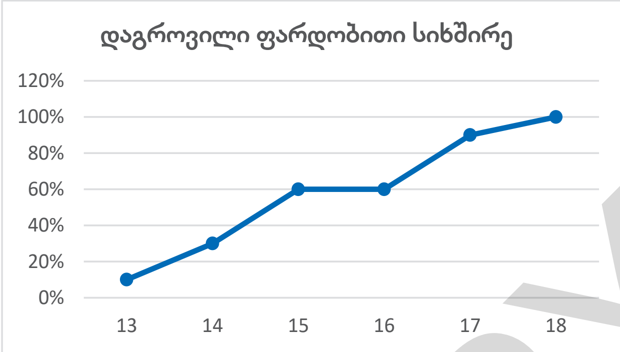
მოცემული ცხრილიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ: არა უმეტეს 13-წამიანი შედეგი მხოლოდ ერთ მოსწავლეს ჰქონდა; არაუმეტეს 15 წამში დისტანცია მოსწავლეთა 60-მა პროცენტმა დაფარა; 18 წამზე მეტი დრო არცერთ მოსწავლეს არ დასჭირდა.

ცხრილით მოცემული დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეები შეგვიძლია წრფივი დიაგრამის სახით წარმოვადგინოთ.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი.

მაგალითი 2. ცხრილში მოცემულია 25 მე-11 კლასელი მოსწავლის მიერ შემაჯამებელ სამუშაოში მიღებული ქულების სიხშირეთა ცხრილი:

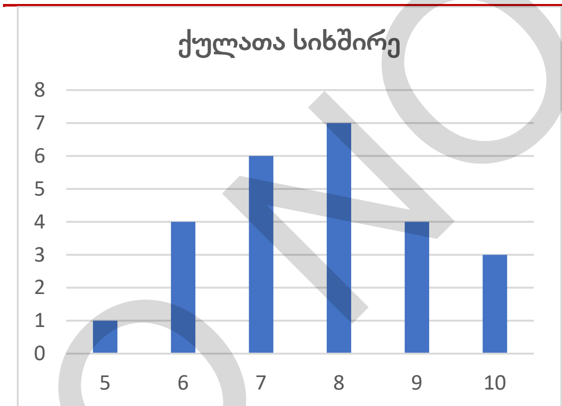
ქულა	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	1	4	6	7	4	3

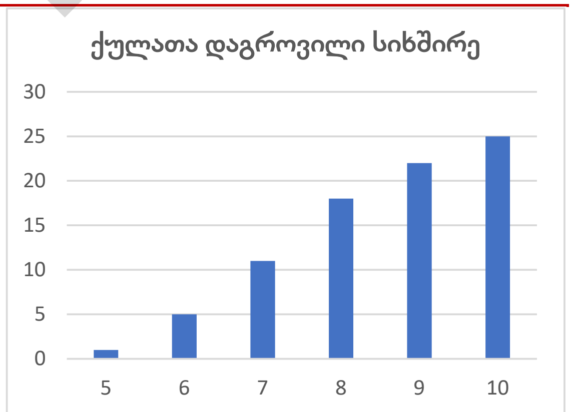


შევადგინოთ ცხრილი, რომელშიც იქნება წარმოდგენილი ქულათა სიხშირე, დაგროვილი სიხშირე და დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე პროცენტებში:

ქულა	**სიხშირე**	**დაგროვილი სიხშირე**	**დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე**
5	1	1	4%
6	4	5	20%
7	6	11	44%
8	7	18	72%
9	4	22	88%
10	3	25	100%

ქვემოთ ქულების სიხშირეთა და ქულების დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამებია მოცემული. როგორც ვხედავთ, დაგროვილ სიხშირეთა მიმდევრობა არაკლებად რიცხვით მიმდევრობას წარმოადგენს.





დავუბრუნდეთ პირველ მაგალითს და განვიხილოთ ზრდის მიხედვით დალაგებული მონაცემები:

12,9 13,5 13,8 14,2 14,6 15,0 16,1 16,5 17,0 17,3

ამ მიმდევრობაში ყოველ, მონაცემს შევუსაბამოთ მისი რიგითი ნომერი, ანუ **რანგი**:

მონაცემი	12,9	13,5	13,8	14,2	14,6	15,0	16,1	16,5	17,0	17,3
რანგი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

რანგი გვიჩვენებს მონაცემის ადგილს მონაცემთა მოწესრიგებულ მიმდევრობაში. მაგა-

ლითად, განხილულ ცხრილში 16,1 მონაცემის რანგია 7, რაც ნიშნავს, რომ 16,1 წამი, არის მე-7 შედეგი 100 მეტრზე სირბილში.

შეიძლება მოხდეს ისე, რომ რომელიმე მონაცემი ვარიაციულ მწკრივში რამდენჯერმე განმეორდეს. ბუნებრივია, რომ ტოლ მონაცემებს ერთი და იგივე რანგი მივანიჭოთ. ამისათვის თითოეულ ასეთ მონაცემს ანიჭებენ მათი რიგითი ნომრების საშუალოს. მაგალითად, მონაცემებში: 1 3 5 5 7 მონაცემები „5 5“ იკავებენ მე-3 და მე-4 ადგილებს, ამიტომ მათი რანგი იქნება (3+4):2=3,5.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა არის მონაცემთა დაგროვილი სიხშირე? დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე?
2. რას გვიჩვენებს 1-ელი მაგალითის ცხრილში დაგროვილი ფარდობითი სიხშირის ჩანაწერი „90%“ ?
3. როგორ იპოვი მონაცემთა ერთობლიობაში მონაცემის რანგს?
4. როგორ გამოითვლი ტოლი მონაცემების რანგს?

სავარჯიშოები

1 მწვრთნელი ყოველი მატჩის შემდეგ ფეხბურთელებს აფასებს 0-იდან 10-ამდე ქულებით. ერთ-ერთი მატჩის შემდეგ ფეხბურთელების მიერ მიღებული ქულები იყო შემდეგი:

4,5 6 5,5 5 7 6,5 6,5 7 6 5 7 8,5 6.

მონაცემების მიხედვით შეადგინე:

ა) მონაცემთა ვარიაციული მწკრივი;

ბ) სიხშირეთა ცხრილი;

გ) დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი;

დ) დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილი.

2 ცხრილში მოცემულია ძიუდოს სექციის წევრი მოსწავლეების ასაკთა სიხშირე:

ასაკი	9	10	11	13	14	15	16	17
სიხშირე	2	0	1	4	1	2	4	6

ა) შეადგინე დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები;

ბ) ააგე სიხშირეთა, დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა დიაგრამები.

3 ცხრილში მოცემულია მოსწავლის მიერ სემესტრის განმავლობაში მიღებულ ქულათა სიხშირე.

ქულა	4	5	6	7	8	9	10
სიხშირე	2	1	4	6	5	2	0

ა) შეადგინე დაგრივილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები;

ბ) ააგე სიხშირეთა, დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა დიაგრამები.

4 გადმოწერე 5.1 პარაგრაფის მე-5 სავარჯიშოს მონაცემები და თითოეულ მონაცემს მიანიჭე შესაბამისი რანგი.

5 ცხრილში მოცემულია ხუთი დღის განმავლობაში მაღაზიის მიერ გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობა.

დღე	ორშაბათი	სამშაბათი	ოთხშაბათ	ხუთშაბათი	პარასკევი
რაოდენობა	4	3	5	4	5

შეადგინე მონაცემთა ვარიაციული მწკრივი და თითოეულ მონაცემს მიუწერე რანგი.

6 ერთიან ეროვნულ გამოცდაზე მათემატიკაში 10 აბიტურიენტის მიერ მიღებული ქულებია:

17 50 23 44 35 21 23 44 48 31

გადაიწერე მონაცემები და თითოეულს მიუწერე შესაბამისი რანგი.

7 ცხრილში მოცემულია სემესტრის განმავლობაში მაკას მიერ მიღებულ ქულათა დაგროვილი სიხშირეები. ცხრილის მიხედვით შეადგინე მაკას ქულათა სიხშირეები და ააგე სიხშირეთა და დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამები.

ქულა	3	4	5	6	7	8	9	10
დაგროვილი სიხშირე	1	1	2	4	7	9	10	10

8 მე-3 სავარჯიშოში მოცემული სიხშირეთა ცხრილის მიხედვით გამოთვალე მონაცემთა:

ა) მოდა; ბ) მედიანა; გ) საშუალო; დ) დიაპაზონი; ე) სტანდარტული გადახრა.

9 რამდენი სამნიშნა ნატურალური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ ციფრებით: 1, 2, 3 ა) ციფრების გამეორების გარეშე? ბ) ციფრების გამეორების დაშვებით?

10 რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ კენტი ციფრებით: ა) ციფრების გამეორების გარეშე? ბ) ციფრების გამეორების დაშვებით?

11 წრეწირზე მონიშნულია 5 წერტილი.

ა) რამდენი ქორდა არსებობს, რომელთა ბოლოები ეს წერტილებია?

ბ) რამდენი სამკუთხედი არსებობს, რომელთა წვეროები ეს წერტილებია?

გ) რამდენი ოთხკუთხედი არსებობს, რომელთა წვეროები ეს წერტილებია?

12 კლასში 12 გოგონა და 13 ვაჟია. ერთი გოგონა და ერთი ვაჟი უნდა შეარჩიონ რაიონულ ღონისძიებაში მონაწილეობის მისაღებად. შერჩევის რამდენი განსხვავებული ვარიანტი არსებობს? შერჩევის რამდენი განსხვავებული ვარიანტი იარსებებს იმ შემთხვევაში, თუ შესარჩევი იქნება 2 გოგონა და 2 ვაჟი?

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №15

ცხრილში მოცემულია საშუალო მაქსიმალური ტემპერატურა ბათუმში პირველი ექვსი თვის განმავლობაში

თვე	იანვარი	თებერვალი	მარტი	აპრილი	მაისი	ივნისი
ტემპერატურა (T°C)	10	12	14	20	22	24

ცხრილის მიხედვით უპასუხე 1-5 შეკითხვებს:

1 რას უდრის მონაცემთა მედიანა?

ა) 14; ბ) 20; გ) 17; დ) 12.

2 რას უდრის მონაცემთა საშუალო?

ა) 15; ბ) 14; გ) 16; დ) 17.

3 რას უდრის მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი?

ა) 12; ბ) 14; გ) 16; დ) 17.

4 რომელი მონაცემის რანგია 5-ის ტოლი?

ა) 14-ის; ბ) 20-ის; გ) 12-ის; დ) 22-ის.

5 გამოთვალე მონაცემთა სტანდარტული გადახრა მეათედის სიზუსტით.

ა) 5,3; ბ) 3,7; გ) 12,9; დ) 4,3.

6 ცხრილში მოცემულია კალათბურთის გუნდის წევრების ასაკთა სიხშირე:

ასაკი	17	18	19	20	21	22	23	24
სიხშირე	2	0	2	0	2	3	2	1

შეადგინე დაგროვილ სიხშირეთა და დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ცხრილები.

7.3 ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულები

მიზანი

ხდომილობებზე მოქმედებების გახსენება და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება

რამდენიმე მარტივი ამოცანის განხილვით გავიხსენოთ, რა მოქმედებებსა და ფორმულებს ვიყენებდით ხდომილობათა ალბათობის გამოსათვლელად.

ამოცანა 1. მონეტას აგდებენ 2-ჯერ. გავარკვიოთ, რა მეტადაა მოსალოდნელი: ორივე აგდებისას ერთი და იმავე შედეგის მოსვლა, თუ განსხვავებული შედეგების მოსვლა?

ამოხსნა. მონეტის ორჯერ აგდების შედეგის წინასწარ გამოცნობა შეუძლებელია. ასეთ მოქმედებას **შემთხვევით ექსპერიმენტს ვუწოდებთ.** ეს ექსპერიმენტი ოთხიდან ერთ-ერთი შედეგით შეიძლება დამთავრდეს:

(გგ) ორივე აგდებისას მოვა გერბი;

(სს) ორივე აგდებისას მოვა საფასური;

(გს) პირველი აგდებისას მოვა გერბი, მეორე აგდებისას – საფასური;

(სგ) პირველი აგდებისას მოვა საფასური, მეორე აგდებისას – გერბი.

ჩამოთვლილი ოთხივე შესაძლო შედეგი თანაბრად მოსალოდნელია, რადგან არცერთ მათგანს არა აქვს დანარჩენებთან უპირატესობა. სხვა სიტყვებით, ეს ოთხი შედეგი **ტოლადალბათურია.** ამასთან, ერთ-ერთი მათგანის განხორციელება გამორიცხავს დანარჩენებიდან რომელიმეს განხორციელებას, ე.ი. ჩამოთვლილი შედეგები ურთიერთგამომრიცხავი, ანუ **არათავსებადებია.** გარდა ამისა, ექსპერიმენტის შედეგთა მოცემული ჩამონათვალი **სრულია**, რადგან შეუძლებელია ამ ოთხი შედეგისგან განსხვავებული შედეგის მიღება.

განმარტება . შემთხვევითი ექსპერიმენტის შედეგთა არათავსებად და სრულ ერთობლიობას **ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე**, ხოლო ამ სივრცის ელემენტებს **ელემენტარული ხდომილობები** ეწოდება.

ორი მონეტის აგდების ცდაში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ოთხელემენტიანი სიმრავლეა.

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ქვესიმრავლეს **ხდომილობა** ეწოდება. ხდომილობას დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ. მაგალითად, ხდომილობა „ორივე აგდებისას მოვა ერთი და იგივე შედეგი", შეგვიძლია აღვნიშნოთ A ასოთი. იგი ორი ელემენტარული ხდომილობისაგან გგ-სგან და სს-გან შედგება: $A=\{გგ, სს\}$. ხდომილობის შემადგენელ ელემენტარულ ხდომილობებს **ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობები** ეწოდება. ვიტყვით, რომ ხდომილობა განხორციელდა, თუ მისი რომელიმე ელემენტარული ხდომილობა განხორციელდა.

ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში უნდა შევადაროთ $A=\{გგ, სს\}$ და $B=\{გს, სგ\}$ ხდომილობები. ცხადია, რომ ეს ხდომილობები ტოლადმოსალოდნელებია, რადგან თითოეული ოთხი ტოლადმოსალოდნელი ელემენტარული ხდომილობიდან ორს შეიცავს. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როგორც A, ისე B ხდომილობის განხორციელების შანსი 50%-ის, ანუ $\frac{1}{2}$-ის ტოლია. სხვა სიტყვებით, A და B ხდომილობების **ალბათობა** უდრის $\frac{1}{2}$-ს. ეს ფაქტი ტოლობით ასე ჩაიწერება: $p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$. ელემენტარულ ხდომილობათა მთელი სივრცის ალბათობა 1-ის ტო-

ლია. იგი **აუცილებელი** ხდომილობაა. თუ სივრცე ტოლადალბათური n-რაოდენობის ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება, მაშინ თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა $\frac{1}{n}$ ტოლი იქნება, ხოლო k რაოდენობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობის შემცველი A ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$p(A)=\frac{k}{n}. \qquad (1)$$

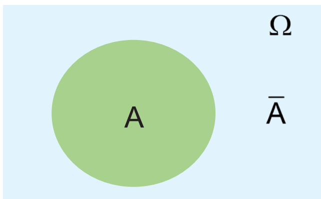
აღწერილ სქემას **ალბათობის კლასიკური სქემა** ეწოდება. ამ სქემით და 1-ელი ფორმულით სარგებლობისას მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე ტოლადალბათური ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგება. უკვე განხილული მონეტის აგდების გარდა, ასეთია ჩვენთვის წინა კლასებიდან ცნობილი ექსპერიმენტები: კამათლის გაგორება, დასტიდან ბანქოს ან კალათიდან ბურთის ამოღება და სხვ.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ბევრი შემთხვევითი მოვლენა აღწერილ სქემაში არ თავსდება, რადგან როგორც წესი, მათი შედეგები არაა ტოლადალბათური. მაგალითად, ორი მოჭადრაკის პარტია შეიძლება სამი შედეგით დამთავრდეს: მოიგოს ერთმა, მოიგოს მეორემ ან პარტია ყაიმით დასრულდეს. ცხადია, რომ ეს სამი შედეგი ელემენტარულ ხდომილობათა სრულ და არათავსებად სისტემას ქმნის. მაგრამ ეს ხდომილობები არაა ტოლი ალბათობის მქონე, თუნდაც იმიტომ, რომ შეიძლება ერთი მოთამაშე იყოს დამწყები მოჭადრაკე, მეორე კი დიდოსტატი.

ამოცანა 2. გიას სასკოლო საჭადრაკო ტურნირში გამარჯვების ალბათობა 0,4-ის ტოლია. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ გია ამ ტურნირში ვერ გაიმარჯვებს?

ამოხსნა. ტურნირში გიასთვის შეიძლება დადგეს მხოლოდ ორი შედეგი: მოიგოს ტურნირი ან ვერ მოიგოს ტურნირი. ამ ორი არათავსებადი ხდომილობის ჯამური ალბათობა 1-ის ტოლია. ამიტომ იმის ალბათობა, რომ გია ტურნირში ვერ გაიმარჯვებს 1–0,4=0,6-ის ტოლია.

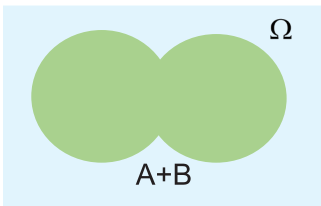
განმარტება. A ხდომილობის საწინააღმდეგო ეწოდება იმ ხდომილობას, რომელიც ხორციელდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არ ხორციელდება A ხდომილობა.



ნახ.1

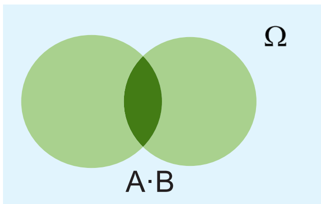
A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობას $\overline{A}$ ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება არა ა). $\overline{A}$ ხდომილობა შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ყველა იმ ხდომილობისაგან, რომლებიც A ხდომილობაში არ შედის. ამიტომ მართებულია ტოლობა:

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \qquad (2)$$



ნახ. 2

ხდომილობები, ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა სახის სიმრავლეები, თვალსაჩინოებისთვის შეგვიძლია ვენის დიაგრამით გამოვსახავთ. 1-ელ ნახაზზე Ω ასოთი აღნიშნული ელემენტარულ ხდომილობათა მთელი სივრცე მართკუთხედის სახითაა მოცემული (Ω-ბერძნული მთავრული ასოა, იკითხება როგორც „ომეგა“). A ხდომილობა წრის სახით, ხოლო მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა ამ წრის დამატების სახითაა მოცემული (დიაგრამის ლურჯი ნაწილი).



ნახ. 3

ხდომილობებზე, როგორც სიმრავლეებზე, შეგვიძლია შევასრულოთ სიმრავლური მოქმედებები.

ორი A და B ხდომილობის სიმრავლურ გაერთიანებას ხდომი-

ლობათა ჯამი ეწოდება და A+B ჩანაწერით აღინიშნება (ზოგჯერ ჯამის ჩასაწერად $A \cup B$-ს იყენებენ). განმარტების თანახმად: A+B ხდომილობა ხორციელდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც ხორციელდება (ნახ. 2).

ორი ხდომილობის სიმრავლურ თანაკვეთას ხდომილობათა ნამრავლი ეწოდება და A·B ჩანაწერით აღინიშნება (ზოგჯერ ნამრავლის ჩასაწერად $A \cap B$-ს იყენებენ). განმარტების თანახმად A·B ხდომილობა ხორციელდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ხორციელდება, როგორც A, ისე B ხდომილობა (ნახ. 3).

A და B ხდომილობებს ეწოდება **დამოუკიდებელი ხდომილობები**, თუ

$$p(A \cdot B)=p(A) \cdot p(B).$$

ხდომილობათა დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ ერთი მათგანის მოხდენა-არმოხდენა არ ახდენს გავლენას მეორე ხდომილობის მოხდენასა და არმოხდენაზე.

მაგალითად, თუ მონეტას ვაგდებთ 2-ჯერ, ის, თუ რა შედეგი გვექნება მეორე აგდებისას, არაა დამოკიდებული პირველი აგდების შედეგზე.

ამოცანა 3. კამათელს აგორებენ ორჯერ. მოცემულია ორი ხდომილობა:

A: პირველი გაგორებისას მოვა კენტი ქულა;

B: მეორე გაგორებისას მოვა ლუწი ქულა.

დავამტკიცოთ, რომ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

ამოხსნა. კამათლის ორჯერ გაგორებისას გვაქვს სულ 6·6=36 ელემენტარული ხდომილობა, რომელთაგან 3·6=18 არის A ხდომილობის ხელშემწყობი და 6·3=18 – B ხდომილობის ხელშემწყობი. ამიტომ, 1-ელი ფორმულით

$$p(A)=p(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}.$$

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

მეორე მხრივ, როგორც მოცემული ცხრილიდან ჩანს, A·B ხდომილობის ხელშემწყობია 9 ელემენტარული ხდომილობა, ამიტომ

$$p(A \cdot B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

მივიღეთ, რომ $p(A \cdot B)= p(A) \cdot p(B)$.

განხილულ ამოცანაში ის, რომ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია ნიშნავს, რომ პირველი გაგორების შედეგს არა აქვს მეორე გაგორების შედეგზე გავლენა, რაც, ცდის შინაარსიდან გამომდინარე, ჩვენთვის ისედაც ცხადი იყო.

მსგავს ამოცანებში ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის დასათვლელად საკმარისია გამოვთვალოთ თითოეული ხდომილობის ალბათობა და შედეგები გადავამრავლოთ.

ამოცანა 4. კალათბურთელი 10 საჯარიმო ტყორცნიდან 8-ს ათავსებს კალათში. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ კალათბურთელი 2 საჯარიმო ტყორცნიდან ერთს მაინც ააცილებს?

ამოხსნა. ამოცანის მოცემულობიდან გამომდინარეობს, რომ კალათბურთელის მიერ ნატყორცნი ბურთი კალათში 0,8-ის ტოლი ალბათობით თავსდება.

ამოცანა ორი განსხვავებული გზით ამოვხსნათ.

პირველი გზა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

A: პირველი ნატყორცნი მოთავსდება კალათში;

B: მეორე ნატყორცნი მოთავსდება კალათში.

C: ერთი ნატყორცნი მაინც არ მოთავსდება კალათში.

ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას: $C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$, სადაც სამივე შესაკრები

არათავსებადი ხდომილობებია, ამიტომ:

$$p(C)=p(A\cdot\bar{B})+p(\bar{A}\cdot B)+p(\bar{A}\cdot\bar{B})=p(A)\cdot p(\bar{B})+p(\bar{A})\cdot p(B)+p(\bar{A})\cdot p(\bar{B})=$$

$$=0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}36.$$

მეორე გზა. ხდომილობის „ერთს მაინც ააცილებს“ საწინააღმდეგო ხდომილობაა „ორივეს ჩააგდებს“. ამ უკანასკნელის ალბათობა კი არის $0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64$. ამიტომ, მე-2 ტოლობის ძალით, საძიებელი ალბათობაა $1-0{,}64=0{,}36$.

მოცემულ ამოცანაში ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ პირველი და მეორე ტყორცნის შედეგები დამოუკიდებელი ხდომილობებია. ამას გარდა, ვისარგებლეთ არათავსებადი ხდომილობების შემდეგი თვისებით:

არათავსებადი ხდომილობების ჯამის ალბათობა მათი ალბათობათა ჯამის ტოლია.

ეს თვისება მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$p(A\cdot B)=0\Rightarrow p(A+B)=p(A)+p(B).$$

სიმრავლურ ენაზე ეს თვისება ნიშნავს: სასრული და თანაუკვეთი სიმრავლეების გაერთიანების ელემენტთა რაოდენობა თითოეული სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობის ჯამის ტოლია.

გავიხსენოთ უფრო ზოგადი ფორმულა, რომელიც სიმრავლურ ენაზე ასეთივე მარტივი შინაარსის მქონეა:

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ნებისმიერი ორი A და B ხდომილობისათვის მართებულია ტოლობა:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B). \qquad (3)$$

იმ შემთხვევაში, როცა A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია მე-3 ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A)\cdot p(B). \qquad (4)$$

მე-4 ამოცანა შეგვეძლო ამოგვეხსნა მე-4 ტოლობის დახმარებით. მართლაც, თუ ამ ამოცანის ამოხსნის პირველი გზის აღნიშვნებით ვისარგებლებთ და გავითვალისწინებთ, რომ $C=\bar{A}+\bar{B}$ მეოთხე ტოლობიდან მივიღებთ:

$$p(C)=p(\bar{A})+p(\bar{B})-p(\bar{A})p(\bar{B})=0{,}2+0{,}2-0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}36.$$

ამოცანა 5. ბაქანზე 12 მგზავრი ელოდა მატარებელს. ჩამოდგა მატარებელი, რომელიც 10 ვაგონისაგან შედგება. გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ 7 მგზავრი ავა მე-3 ვაგონში.

შენიშვნა. ამოცანაში იგულისხმება, რომ ყოველი მგზავრი დანარჩენი მგზავრებისაგან დამოუკიდებლად, ტოლი ალბათობით ირჩევს ნებისმიერ ვაგონს.

ამოხსნა. ყოველ მგზავრს აქვს ვაგონის ამორჩევის 10 ვარიანტი, ამიტომ 12 მგზავრს ერთად აქვს ამორჩევის 10^{12} ვარიანტი, ანუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება 10^{12} ელემენტარული ხდომილობისაგან. თუ მე-3 ვაგონში ავა 7 მგზავრი, დანარჩენ 9 ვაგონში 5 მგზავრთა განაწილების 9^5 შესაძლებლობა გვექნება, ამასთან 12 მგზავრიდან 7-ის ამორჩევის C_{12}^7 შესაძლებლობაა. მივიღეთ, რომ სულ გვაქვს $C_{12}^7\cdot 9^5$ ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობა. 1-ელი ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ საძიებელი ალბათობაა $\dfrac{C_{12}^7\cdot 9^5}{10^{12}}$.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა არის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?
2. რა შემთხვევაში გვაქვს ალბათობის კლასიკური სქემა?
3. როგორ ხდომილობებს ეწოდება არათავსებადი? დამოუკიდებელი?
4. რა შემთხვევაში იქნება ორი ხდომილობა არათავსებადიც და დამოუკიდებელიც?
5. როგორ გამოითვლება არათავსებადი ხდომილობების ჯამის ალბათობა? დამოუკიდებელი ხდომილობების ჯამის ალბათობა?
6. პარაგრაფის მე-5 ამოცანაში ელემენტარულ ალბათობათა სივრცის ელემენტთა რაოდენობის გამოსათვლელად რა მეთოდი გამოვიყენეთ კომბინატორიკიდან, ამორჩევა დაბრუნებით თუ ამორჩევა დაბრუნების გარეშე?
7. როგორ განიმარტება C_{12}^{7} ?

სავარჯიშოები

1

რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე:

ა) 1 მონეტის აგდებისას?
ბ) 3 მონეტის აგდებისასას?
გ) ერთი კამათლის გაგორებისას?
დ) ორი კამათელის გაგორებისას?
ე) n-ცალი მონეტის აგდებისას?
ვ) n-ცალი კამათელის გაგორებისას?

2

რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, თუ:

ა) 36 – ბანქოიანი შეკვრიდან იღებენ ერთ ბანქოს?
ბ) 36 – ბანქოიანი შეკვრიდან იღებენ ორ ბანქოს?
გ) ფეხბურთის გუნდი ატარებს 3 თამაშს?
დ) კალათბურთის გუნდი ატარებს 4 თამაშს.

3

კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. შემდეგი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, რომელი შემთხვევითი და რომელი შეუძლებელი?

ა) ჯამში მოვიდა 1 ქულა;
ბ) ჯამში მოვიდა 2 ქულა;
გ) ჯამში მოვიდა 1 ქულაზე მეტი.

4

კალათში 2 შავი და 3 თეთრი ბურთულაა. კალათში ჩაუხედავად იღებენ სამ ბურთულას. შემდეგი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, რომელი შემთხვევითი და რომელი შეუძლებელი?

ა) ამოღებული სამივე ბურთულა თეთრია;
ბ) ამოღებული არცერთი ბურთულა არაა თეთრი;
გ) ამოღებული ერთი ბურთულა მაინცაა თეთრი.

5

მონეტას აგდებენ 2-ჯერ. შემდეგი ხდომილობებიდან რომელი ორია ტოლადმოსალოდნელი?

ა) პირველი აგდებისას მოვა გერბი;

ბ) მეორე აგდებისას მოვა საფასური;

გ) ორივე აგდებისას მოვა საფასური.

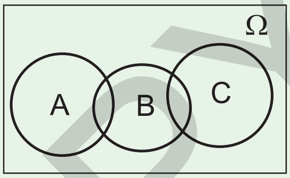
6 კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. შემდეგი ხდომილობებიდან რომელი ორია ტოლადმოსალოდნელი?

ა) პირველი გაგორებისას მოვა კენტი ქულა;

ბ) მეორე გაგორებისას მოვა ლუწი ქულა;

გ) ორივე გაგორებისას მოვა ლუწი ქულა.

7 ვენის დიაგრამაზე მოცემულია A, B და C ხდომილობები (ნახ. 4). მათგან რომელი ორი ხდომილობაა არათავსებადი?



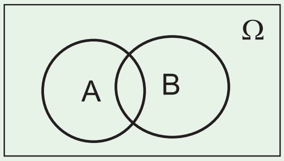
ნახ. 4

8 მე-4 ნახაზის მიხედვით ჩამოთვლილი წყვილებიდან რომელი წყვილი ადგენს არათავსებად ხდომილობებს?

ა) A და $\bar{B}$;   ბ) A·B და B·C;   გ) A+B და B+C;   დ) $\bar{A}$ და $\bar{C}$.

9 მოცემულია p(A)=0,2; p(B)=0,3, ხოლო p(A·B)=0,1. გადაიხაზე მე-5 ნახაზზე მოცემული დიაგრამა და A·B, $A\cdot\bar{B}$, $\bar{A}\cdot B$ და $\bar{A}\cdot\bar{B}$ ხდომილობებს მიუწერე მათი ალბათობები.

10 მოცემულია p(A)=0,2; p(B)=0,3, ამასთან A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია. გადაიხაზე მე-5 ნახაზზე მოცემული დიაგრამა და A·B, $A\cdot\bar{B}$, $\bar{A}\cdot B$ და $\bar{A}\cdot\bar{B}$ ხდომილობებს მიუწერე მათი ალბათობები.



ნახ. 5

11 რას უდრის იმის ალბათობა, რომ სამი მონეტის აგდებისას მოვა:

ა) მხოლოდ ერთი გერბი?   ბ) მხოლოდ ორი გერბი?

გ) სამივე გერბი?   დ) ერთი მაინც გერბი.

12 რას უდრის იმის ალბათობა, რომ კამათლის 2-ჯერ გაგორებისას ორივეჯერ მოვა ლუწი რიცხვი?

13 რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა:

ა) 2 ქულა; ბ) 6 ქულა; გ) 7 ქულა; დ) 13 ქულა.

14 კალათაში აწყვია 1-იდან 5-ამდე გადანომრილი 5 ბურთი. იღებენ ერთ ბურთს. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ბურთი იქნება: ა) კენტნომრიანი? ბ) ლუწნომრიანი?

15 კალათაში აწყვია 1-იდან 5-ამდე გადანომრილი 5 ბურთი. იღებენ ორ ბურთს. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ორივე ბურთი იქნება: ა) კენტნომრიანი? ბ) ლუწნომრიანი?

16 კალათაში 4 წითელი, 5 თეთრი და 6 შავი ბურთია. კალათიდან იღებენ 5 ბურთს. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ხუთივე ბურთი: ა) წითელია; ბ) თეთრია; გ) შავია.

17 კალათაში 4 წითელი, 5 თეთრი და 6 შავი ბურთია. კალათიდან იღებენ 2 ბურთს. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ორივე ბურთი ა) წითელია; ბ) თეთრია; გ) შავია.

18 აგდებენ 2 მონეტას. დაამტკიცე, რომ ხდომილობები „ერთ მონეტაზე მაინც მოვა გერბი“ და „ერთ მონეტაზე მაინც მოვა საფასური“ არ არის დამოუკიდებელი ხდომილობები.

19 აგდებენ 3 მონეტას. დაამტკიცე, რომ:
A: „ორ მონეტაზე მაინც მოვა გერბი“ და
B: „ორ მონეტაზე მაინც მოვა საფასური“ არათავსებადი ხდომილობებია და მათი ჯამი აუცილებელი ხდომილობაა.

20 მოჭადრაკე ორ ტურნირში მონაწილეობს. ერთში მისი გამარჯვების ალბათობაა 0,4, მეორეში, პირველი შედეგისგან დამოუკიდებლად – 0,7. გამოთვალე იმის ალბათობა, რომ: ა) მოჭადრაკე ორივე ტურნირში გაიმარჯვებს; ბ) ერთ ტურნირში მაინც გაიმარჯვებს.

21 დედამ ლელა წამლის საყიდლად სამ ახლომდებარე აფთიაქში გააგზავნა. იმის ალბათობა, რომ წამალი იქნება პირველ აფთიაქში – 0,6-ის ტოლია, მეორე აფთიაქში – 0,5-ის ტოლი, ხოლო მესამე აფთიაქში – 0,7-ის ტოლი. რა არის იმის ალბათობა, რომ წამალი არის:
ა) სამივე აფთიაქში?
ბ) მხოლოდ ერთ აფთიაქში?
გ) მხოლოდ ორ აფთიაქში?
დ) ერთ აფთიაქში მაინც?

22 პარაგრაფის მე-5 ამოცანის პირობებში გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ:
ა) მესამე ვაგონში არცერთი მგზავრი არ ავა;
ბ) მე-3 ან მე-4 ვაგონში არცერთი მგზავრი არ ავა.

23 ყუთში 20 ბურთია, რომელთაგან 3 თეთრი და 17 შავი ფერისაა. იღებენ 10 ბურთს. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამოღებულ ბურთებში იქნება:
ა) სამი თეთრი ბურთი?
ბ) მხოლოდ ერთი თეთრი ბურთი?
ბ) ერთი თეთრი ბურთი მაინც?

24 გრიპის ვირუსით დაავადებული პაციენტები დიაგნოზის დასმისას დადებით პასუხს ვირუსის ქონის შესახებ იღებენ 0,95-ის ტოლი ალბათობით, ხოლო ვირუსის არმქონე პაციენტები ვირუსის ქონის შესახებ მცდარ დადებით პასუხს – 0,03-ის ტოლი ალბათობით. აღმოჩნდა, რომ დიაგნოზისთვის მისული პაციენტების 18,7 პროცენტმა მიიღო დადებითი პასუხი. დაადგინე, რა არის იმის ალბათობა, რომ დიაგნოზის დასასმელად მისული პაციენტი გრიპის ვირუსითაა დაავადებული.

7.4 პირობითი ალბათობა

მიზანი

პირობითი ალბათობის განმარტება და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება

ამოცანა 1. ოჯახში ორი ბავშვია. რა არის იმის ალბათობა, რომ ორივე ბავშვი გოგონაა?

ამოხსნა. სულ გვაქვს 4 ტოლადალბათური ელემენტარული ხდომილობა: გოგო-გოგო, გოგო-ბიჭი, ბიჭი-გოგო, ბიჭი-ბიჭი. ხდომილობის A: „ორი ბავშვიდან ორივე გოგონაა“ ხელშემწყობია მხოლოდ ერთი: გოგო-გოგო, ამიტომ p(A)=0,25.

განვიხილოთ იგივე ამოცანა, ოღონდ დამატებითი პირობით, რომ განხორციელებულია ხდომილობა B: „პირველი ბავშვი გოგონაა“. ამ შემთხვევაში იმისათვის, რომ შესრულდეს A ხომილობა „ორი ბავშვიდან ორივე გოგონაა“, მეორე ბავშვი უნდა იყოს გოგონა, რისი ალბათობაც 0,5-ის ტოლია, რადგან B პირობის გამო, ორი ხდომილება: ბიჭი-გოგო და ბიჭი-ბიჭი გამოირიცხა და დარჩენილი ორი ელემენტრული ხდომილობიდან ხელსაყრელია მხოლოდ ერთი. ე.ი. B პირობის დამატებამ A ხდომილობის ალბათობა შეცვალა.

A ხდომილობის ალბათობას იმ პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა, პირობითი ალბათობა ეწოდება და p(A/B) ჩანაწერით აღინიშნება.

ამოცანა 2. აგდებენ სამ მონეტას. ვთქვათ, A ხდომილობაა „გერბი მოვა მხოლოდ ერთხელ“, ხოლო B ხდომილობა – „გერბი კენტჯერ მოვიდა“. გამოვთვალოთ p(A), p(B) და p(A/B).

ამოხსნა. სულ გვაქვს 8 ელემენტარული ხდომილობა, რომელთაგან A ხდომილობის ხელშემწყობია: გსს, სგს და სსგ. ამიტომ, p(A)=0,375. B ხდომილობის ხელშემწყობია: გსს, სგს, სსგ და გგგ. ამიტომ p(B)=0,5. p(A/B) განმარტების თანახმად, ნიშნავს იმის ალბათობას, რომ გერბი მოვა მხოლოდ ერთხელ იმ პირობით, რომ გერბი კენტჯერ მოვიდა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, B-ს ხელშემწყობია – 4 ხდომილობა, რომელთაგან 3 არის A-ს ხელშემწყობი (ეს 3 ხდომილობა არის A·B ნამრავლის ხელშემწყობიც), ამიტომ $p(A/B)=\dfrac{3}{4}$.

განხილულ ამოცანაში მივიღეთ: $p(A/B)=\dfrac{3}{4}=\dfrac{0,375}{0,5}=\dfrac{p(A\cdot B)}{p(B)}$.

განვიხილოთ ზოგადი კლასიკური სქემა: ვთქვათ Ω სივრცე შედგება n-ცალი ტოლადალბათური ელემენტარული ხდომილობისაგან. A·B ხდომილობა შედგება k-ცალი ელემენტარული ხდომილობისაგან, ხოლო B – m-ცალი ელემენტარული ხდომილობისგან. მაშინ, წინა ამოცანების ანალოგიურად,

$$p(A/B)=\frac{k}{m}=\frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{p(A\cdot B)}{p(B)}.$$

განმარტება. ნებისმიერი A და B ხდომილობისათვის, თუ $p(B)\neq 0$, მაშინ A ხდომილობის პირობითი ალბათობა იმ პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა, გამოითვლება ფორმულით:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cdot B)}{p(B)}. \qquad (1)$$

თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ p(A·B)=p(A)·p(B) და ამ შემთხვევაში

$$p(A/B)=p(A). \qquad (2)$$

1-ელი ფორმულიდან გამომდინარეობს ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოსათვლელი ტოლობა:

$$p(A\cdot B)=p(A/B)\cdot p(B). \qquad (3)$$

განვიხილოთ ამოცანა, რომლის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ მე-3 ფორმულას.

ამოცანა 3. ყუთში 5 თეთრი და 10 შავი ბურთია. იღებენ ჯერ ერთ, შემდეგ – მეორე ბურთს. გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ამოღებული ბურთები ერთი ფერისაა; ბ) ამოღებული მეორე ბურთი არის თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

A_1: ამოღებული პირველი ბურთი თეთრია; A_2: ამოღებული მეორე ბურთი თეთრია.

ა) უნდა გამოვთვალოთ ორი $A_1 \cdot A_2$ და $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ არათავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა:

$$p(A_1 \cdot A_2 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = p(A_1 \cdot A_2) + p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) =$$

$$= p(A_1)\cdot p(A_2/A_1) + p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}+\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{11}{21}.$$

ბ) $A_2 = A_1 \cdot A_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$, სადაც $A_1 \cdot A_2$ და $\bar{A}_1 \cdot A_2$ არათავსებადი ხდომილობებია, ამიტომ

$$p(A_2)=p(A_1\cdot A_2)+p(B_1\cdot A_2)=(\text{ვისარგებლოთ მე-3 ფორმულით})=$$

$$=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)+p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}+\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14}=\frac{1}{3}.$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რა შემთხვევაში განიმარტება A-ს პირობითი ალბათობა B პირობით?
2. რა შემთხვევაში არ ცვლის A ხდომილობის ალბათობას B – პირობა?
3. თუ p(A)≠0, მაშინ რის ტოლია p(A/A)?

სავარჯიშოები

1 გამოთვალე p(A/B), თუ p(A·B)=0,3, ხოლო p(B)=0,4.

2 გამოთვალე p(A·B), თუ p(A/B)=0,8, ხოლო p(B)=0,5.

3 გამოთვალე p(A/B), თუ A და B არათავსებადი ხდომილობებია.

4 გამოთვალე p(A/B), თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია და p(A)=0,7.

5 მონეტას აგდებენ 2-ჯერ. გამოთვალე p(A/B), თუ:

ა) A: ორივე აგდებისას მოვა გერბი, B: პირველი აგდებისას მოვა გერბი;
ბ) A: მეორე აგდებისას მოვა გერბი, B: პირველი აგდებისას მოვა საფასური;
გ) A: ორივე აგდებისას მოვა გერბი, B: პირველი აგდებისას მოვა საფასური;
დ) A: ორივე აგდებისას მოვა გერბი, B: ერთხელ მაინც მოვა გერბი.
ე) A: ერთხელ მაინც მოვა გერბი, B: ერთხელ მაინც მოვა საფასური.

6 ოჯახში ორი ბავშვია. რა არის იმის ალბათობა, რომ ორივე ბავშვი ბიჭია, თუ ცნობილია, რომ: ა) პირველი ბავშვი ბიჭია; ბ) ერთ-ერთი ბავშვი ბიჭია.

7 ოჯახში ორი ბავშვია. ცნობილია, რომ ერთ-ერთ ბავშვს ჰქვია მარიამი. რა არის იმის ალბათობა, რომ: ა) მეორე ბავშვი ბიჭია? ბ) მეორე ბავშვი გოგონაა?

8 კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. რა არის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა 7 ქულა, თუ პირველი გაგორებისას მოვიდა: ა) 6 ქულა? ბ) 5 ქულა?

9 კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. რა არის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა 7 ქულა თუ პირველი გაგორებისას მოვიდა: ა) კენტი ქულა? ბ) ლუწი ქულა.

10 მოცემულია $p(A)=0,4$, $p(B)=0,6$, ხოლო $p(A/B)=0,5$. გამოთვალე $p(A \cdot B)$ და $p(A+B)$.

11 მოცემულია $p(A)=0,4$, $p(B)=0,6$, ხოლო $p(A+B)=0,7$. გამოთვალე $p(A/B)$.

12 ყუთში 3 თეთრი და 2 შავი ბურთია. იღებენ ჯერ ერთ ბურთს, შემდეგ მეორეს. გამოთვალე $p(A/B)$ და $p(A/\bar{B})$ პირობითი ალბათობები, თუ A ხდომილობაა „მეორე ამოღებაზე ამოვა თეთრი ბურთი", ხოლო B ხდომილობა – „პირველ ამოღებაზე ამოვა თეთრი ბურთი".

13 ყუთში 3 თეთრი და 2 შავი ბურთია. იღებენ ჯერ ერთ ბურთს, იმახსოვრებენ ფერს და აბრუნებენ უკან. შემდეგ იღებენ მეორეს. გამოთვალე $p(A/B)$ და $p(A/\bar{B})$ პირობითი ალბათობები, თუ A ხდომილობაა „მეორე ამოღებაზე ამოვა თეთრი ბურთი", ხოლო B ხდომილობა – „პირველ ამოღებაზე ამოვა თეთრი ბურთი".

14 ყუთში 3 თეთრი და 2 შავი ბურთია. იღებენ ჯერ ერთ ბურთს, შემდეგ – მეორეს. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ:
ა) ამოღებული ბურთები ერთი ფერისაა;
ბ) ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერისაა;
გ) ამოღებული მეორე ბურთი არის თეთრი.

15 დაამტკიცე, რომ თუ $p(B)\neq 0$, მაშინ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p(A/B)=p(A)$.

16 მონეტას აგდებენ 3-ჯერ. გამოთვალე $p(A/B)$ თუ:
ა) A: პირველი აგდებისას მოვა გერბი, B: ერთი აგდებისას მაინც მოვა გერბი;
ბ) A: ერთი აგდებისას მაინც მოვა გერბი; B: პირველი აგდებისას მოვა გერბი;

17 კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. რა არის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა 7-ზე ნაკლები ქულა, თუ ცნობილია, რომ პირველი გაგორებისას მოვიდა სამზე მეტი ქულა?

18 კამათელს აგორებენ 2-ჯერ. A ხდომილობაა „ორივეჯერ მოვა კენტი ქულა", ხოლო B ხდომილობა – „ქულათა ჯამი ექვსის ტოლია". გამოთვალე $p(A/B)$ და $p(B/A)$.

ქვიზი თვითშემოწმებისათვის №16

1 ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება 20 ტოლადალბათური ელემენტარული ხდომილობისაგან. რას უდრის იმ ხდომილობის ალბათობა, რომელიც შედგება 7 ელემენტარული ხდომილობისაგან?

ა) 0,35; ბ) 0,7; გ) 0,3; დ) 3,5.

2 ყუთში მხოლოდ თეთრი და შავი ბურთებია. ყუთიდან თეთრი ბურთის ამოღების ალბათობა 0,4-ის ტოლია. რის ტოლია ყუთიდან შავი ბურთის ამოღების ალბათობა?

ა) 0,4; ბ) 0,6; გ) 2,5; დ) 0,2.

3 A და B არათავსებადი ხდომილობებია, $p(A)=0,23$, $p(B)=0,4$. რას უდრის A და B ხდომილობათა ჯამის ალბათობა?

ა) 0,9; ბ) 0,92; გ) 0; დ) 0,63.

4 A და B არათავსებადი ხდომილობებია, $p(A)=0,23$, $p(B)=0,4$. რას უდრის A და B ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა?

ა) 0,092; ბ) 0,2; გ) 0; დ) 0,63.

5 A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, $p(A)=0,23$, $p(B)=0,4$. რას უდრის A და B ხდომილობათა ჯამის ალბათობა?

ა) 0,092; ბ) 0,92; გ) 0,538; დ) 0,63.

6 A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, $p(A)=0,23$, $p(B)=0,4$. რას უდრის A და B ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა?

ა) 0,092; ბ) 0,92; გ) 0; დ) 0,63.

7 მოცემულია $p(A)=0,3$, $p(B)=0,5$, ხოლო $p(A/B)=0,4$. გამოთვალე $p(A\cdot B)$ და $p(A+B)$.

8 გაარკვიე, დამოუკიდებელი ხომილობებია თუ არა A და B, თუ $p(A)=0,2$, $p(B)=0,6$, ხოლო $p(A/B)=0,3$.

9 იმისათვის, რომ ჩემპიონთა თასის მერვედფინალურ ეტაპზე მოხვდეს, ფეხბურთის გუნდმა დარჩენილი ორი თამაშიდან ერთი მაინც უნდა მოიგოს. ერთი მატჩის მოგების ალბათობაა 0,4, პირველისგან დამოუკიდებლად, მეორის მოგებისა – 0,6. რა არის ალბათობა იმისა, რომ გუნდი მოხვდება მერვედფინალში?

10 ყუთში 5 თეთრი და 4 შავი ბურთია. თანმიმდევრობით იღებენ 2 ბურთს. ვთქვათ, A ხდომილობაა ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერისაა, ხოლო B ხდომილობა – ამოღებული პირველი ბურთი შავია. დაამტკიცე, რომ A და B არაა დამოუკიდებელი ხდომილობები.

მთელი კურსის გასამეორებელი დავალებები

1. გამოთვალე:

ა) $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$; ბ) $\operatorname{tg}180^\circ-\cos90^\circ$; გ) $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

დ) $\sin60^\circ+\sin120^\circ$; ე) $\cos30^\circ+\cos150^\circ$; ვ) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}$.

ზ) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; თ) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$; ი) $\sin(-210^\circ)+\cos(-240^\circ)$.

2. იპოვე $\cos\alpha$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ $\sin\alpha=\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. იპოვე $\operatorname{tg}\alpha$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ $\cos\alpha=0,6,\ 270^\circ<\alpha<360^\circ$.

4. იპოვე $\sin\alpha$-ს რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ $\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

5. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; ბ) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$; გ) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$;

დ) $\frac{3\cos(\pi-\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(3\pi+\beta)}$; ე) $\frac{1}{\cos^2(\pi-\alpha)}-1$; ვ) $\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^4\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

6. იპოვე:

ა) $f(x)=-3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=\frac{\pi}{4}$ წერტილში;

ბ) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=\frac{\pi}{3}$ წერტილში.

7. იპოვე: ა) $y=2\sin^2x-1$; ბ) $y=1-2\cos^2x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

8. დაადგინე ლუწია თუ კენტი ფუნქცია: ა) $f(x)=x^2\sin x+x$; ბ) $f(x)=3\sin^2x+\frac{x^2}{\cos x}$.

9. იპოვე: ა) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}+3\right)$; ბ) $y=\sin3x+2$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

10. რომელია მეტი:

ა) $\sin\frac{3\pi}{4}$ თუ $\sin\frac{9\pi}{8}$? ბ) $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$ თუ $\sin\frac{9\pi}{8}$? დ) $\cos\frac{\pi}{3}$ თუ $\cos\frac{4\pi}{5}$?

ე) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$ თუ $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{9}$? ვ) $\mathrm{tg}1$ თუ $\mathrm{tg}0{,}2$? ზ) $\sin 3$ თუ $\sin 1{,}6$?

11. გამოთვალე:

ა) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\arccos 0$; გ) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) $\arcsin(-1)$;

ე) $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; ვ) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ზ) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; თ) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

12. ამოხსენი განტოლება:

ა) $2\sin x+1=0$; ბ) $3\mathrm{tg}x-\sqrt{3}=0$; გ) $2\cos x-1=0$; დ) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

ე) $\cos 3x=-1$; ვ) $\mathrm{tg}(x-\pi)=1$; ზ) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$; თ) $2\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{2}$.

13. ამოხსენი $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$ განტოლება და იპოვე $[0;\pi]$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნები.

14. ABC სამკუთხედში AB= 5სმ, BC=6სმ, ხოლო $\cos\angle B=-\frac{1}{20}$. იპოვე: ა) მესამე გვერდი; ბ) ფართობი; გ) შემოხაზული წრის რადიუსი; დ) ჩახაზული წრის რადიუსი.

15. ABC სამკუთხედში AB=6 სმ, BC=8 სმ, ხოლო სამკუთხედის ფართობია 12 სმ^2. გამოთვალე B კუთხის სიდიდე.

16. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული ბისექტრისა ჰიპოტენუზას 6 სანტიმეტრისა და 8 სანტიმეტრის ტოლ მონაკვეთებად ჰყოფს. გამოთვალე ბისექტრისის სიგრძე.

17. სამკუთხედის ორი გვერდია 13 სმ და 15 სმ, ხოლო მესამე გვერდის მედიანა 7 სმ. იპოვე: ა) მესამე გვერდი; ბ) ფართობი.

18. M, N, P და Q წერტილები არ ძევს ერთ სიბრტყეში. შესაძლებელია თუ არა, რომ MQ და NP წრფეები კვეთდნენ ერთმანეთს?

19. დაადგინე, ჭეშმარიტია თუ არა გამონათქვამი: თუ პარალელოგრამის ორი წვერო და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი α სიბრტყეშია, მაშინ პარალელოგრამიც α სიბრტყეშია.

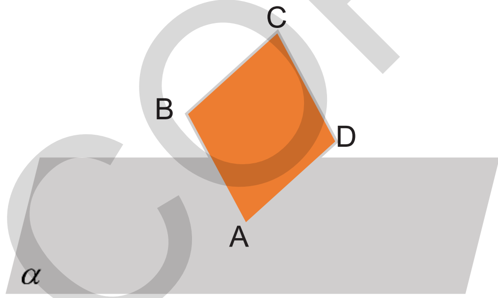
20. A წერტილიდან α სიბრტყემდე მანძილია a სმ, α სიბრტყეზე მდებარე B წერტილამდე – b სმ, ხოლო α სიბრტყეზე A წერტილის გეგმილიდან B წერტილამდე – c სმ. რომელი ტოლობაა მართებული?

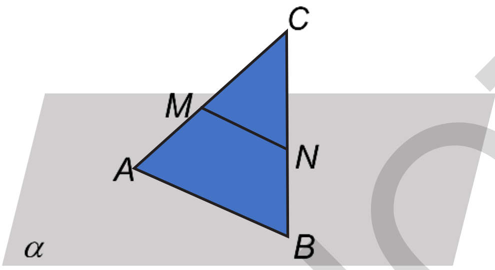
ა) $c^2=a^2+b^2$; ბ) $a^2=b^2+c^2$; გ) $c=a+b$; დ) $b^2=a^2+c^2$.

21. შესაძლებელია თუ არა, რომ წინა ამოცანის პირობებში შერულდეს $a=b+c$ ტოლობა?

22. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის ჰიპოტენუზაა 12 სმ. პირამიდის წვეროდან ფუძის სამივე წვერომდე 10 სმ-ის ტოლი მანძილია. იპოვე მანძილი პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყემდე.

23. ABCD პარალელოგრამის A წვერო ძევს α სიბრტყეში, ხოლო დანარჩენი წვეროები არ ძევს α სიბრტყეში. დაამტკიცე, რომ BC და CD წრფეები კვეთენ α სიბრტყეს

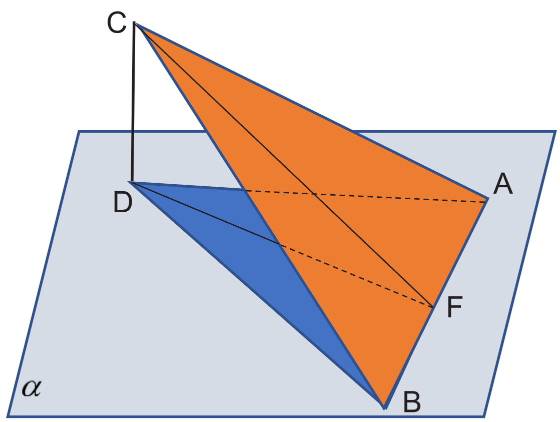




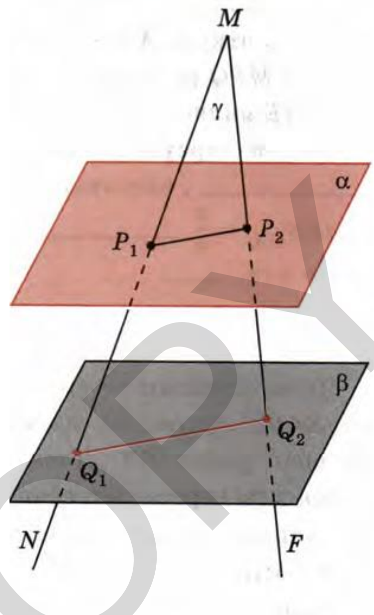
24. ABC სამკუთხედის AB გვერდი ძევს α სიბრტყეში. $C \notin \alpha$. M და N შესაბამისად, AC და BC გვერდების შუაწერტილებია. დაამტკიცე, რომ $MN \parallel \alpha$.

25. M წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებულია MO მართობი და MA და MB დახრილები, რომელნიც თავის გეგმილებთან $\angle MAO = 45°$, $\angle MBO = 30°$ კუთხეებს ადგენენ. დახრილებს შორის კუთხე $90°$-ის ტოლია. იპოვე მანძილი დახრილთა ფუძეებს შორის, თუ $MA = \sqrt{3}$ სმ.

26. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზა α სიბრტყეში, ხოლო C წვერო α სიბრტყის გარეთ მდებარეობს. $AB = 12\sqrt{3}$ სმ, ხოლო C წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი $DC = 9$ სმ. იპოვე კუთხე ABC სამკუთხედის სიბრტყესა და α სიბრტყეს შორის.



27. ნახაზზე მოცემული α და β სიბრტყეები გადაკვეთილია MN და MF წრფეებით, ხოლო შესაბამისი კვეთის წერტილებია: P_1, P_2, Q_1, Q_2. იპოვე P_1P_2, თუ $MP_1 : MQ_1 = 3:4$, $Q_1Q_2 = 72$ სმ.



28. გამოთვალე:

ა) $2^{\log_2 3}$, $3^{\log_3 5}$, $7^{\log_7 9}$;

ბ) $2^{\log_2 3+\log_2 5}$, $\left(3^{\log_3 7}\right)^2$, $\left(3^2\right)^{\log_3 7}$;

გ) $7^{2\log_7 3}$, $10^{3\lg 5}$, $(0,1)^{\lg 7}$;

დ) $2^{3\log_8 5}$, $9^{\log_3 10}$, $5^{\log_{25} 49}$.

29. ამოხსენი განტოლება:

ა) $27^x = 9^{\frac{1}{3}}$; ბ) $(0,5)^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$;

გ) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 18$; დ) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 10$.

30. გამოთვალე:

ა) $\log_2 4$; $\log_2 16$; $\log_3 27$; $\log_3 81$; $\lg 100$; ბ) $\log_4 1$; $\log_5 \frac{1}{5}$; $\log_5 5^3$; $\log_{49} 7^5$.

31. იპოვე x:

ა) $\log_5 x = 2$; ბ) $\log_3 x = -1$; გ) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$; დ) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

ე) $\log_x \frac{1}{16} = 2$; ვ) $\log_x 81 = 4$; ზ) $\log_x \frac{1}{4} = -2$; თ) $\log_x 27 = 3$.

32. ამოხსენი განტოლება:

ა) $16^{x-9} = 0,5$; ბ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$; გ) $3^{3x-4} : 3^{-5x+2} = 27$; დ) $5^{x-7} = \frac{1}{125}$;

ე) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$; ვ) $9^{-5+x} = 729$; ზ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$; თ) $6^{2x-6} \times 6^{5-3x} = 216$.

33. ამოხსენი უტოლება:

ა) $5^{x^2-1} > 0,2$; ბ) $(0,2)^{x^2-2} > 5$; გ) $3^x < \frac{1}{9}$; დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 4$.

34. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\log_2(x-15) = 4$; ბ) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 0$;

გ) $\lg(x^2-2x-4) = \lg 11$; დ) $\lg^2 x + 2\lg x = 8$.

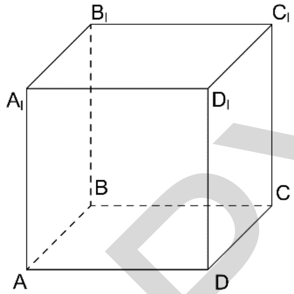
35. ამოხსენი უტოლობა:

ა) $\log_{0,6}x > 2$; ბ) $\log_7 x < 1$; გ) $\lg x \ge -3$; დ) $\lg x \le -2$.

36. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. დაასახელე ვექტორი, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილებია პარალელეპიპედის წვეროები და ტოლია:

ა) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}$ ჯამის;

ბ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CC_1}$ სხვაობის.



37. ABC სამკუთხედის სიბრტყის გარეთ აღებულია D წერტილი. M და N შესაბამისად AB და DC მონაკვეთების შუა წერტილებია. წარმოადგინე $\overrightarrow{MN}$ ვექტორი $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ და $\overrightarrow{DC}$ ვექტორების საშუალებით.

38. არანულოვანი $\vec{a}$ ვექტორის პირველი და მეორე კოორდინატები 0-ის, ხოლო მესამე კოორდინატი -1-ის ტოლია. რას უდრის კუთხე $\vec{a}$ ვექტორსა და $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებს შორის?

39. იპოვე კუთხე $\vec{a}(0;1;-1)$ და $\vec{b}(1;0;-1)$ ვექტორებს შორის.

40. რა არის იმის ალბათობა, რომ 58-დან 82-მდე (ჩათვლით)ნატურალური რიცხვებიდან შემთხვევით ამოღებული რიცხვი იქნება 6-ის ჯერადი?

41. ფაბრიკის მიერ გამოშვებული ყოველი 1000 ცალი მაისურიდან 3 მაისური დეფექტიანია. რა არის იმის ალბათობა, რომ შეძენილი ორი მაისურიდან არცერთი არაა დეფექტიანი?

42. მოსწავლეთა რაიონულ კონფერენციაში 3 მე-10 კლასელი, 5 მე-11 კლასელი და 4 მე-12 კლასელი მოსწავლე მონაწილეობს. გამომსვლელთა თანმიმდევრობა მათ შორის კენჭისყრით უნდა დადგინდეს. რა არის იმის ალბათობა, რომ პირველი გამომსვლელი იქნება მე-10 კლასელი, ხოლო მეორე გამომსვლელი მე-11 კლასელი?

43. ორი კამათელის გაგორებისას ერთ-ერთ კამათელზე მოვიდა 6 ქულა. რა არის იმის ალბათობა, რომ მეორე კამათელზე მოვა: ა) 6 ქულა? ბ) 5 ქულა?

საგნობრივი საძიებელი

სახელმძღვანელოში გამოყენებული სიმბოლოები

$A \in a$ – A წერტილი მდებარეობს a წრფეზე;

$a \div b$ – a და b აცდენილი წრფეებია ;

$a \subset \alpha$ – a წრფე მდებარეობს α სიბრტყეში;

$||$ – პარალელურია;

$\perp$ – მართობულია;

$\in$ – ეკუთვნის ($x \in X$ – x ელემენტი ეკუთვნის X სიმრავლეს);

$\notin$ – არ კუთვნის ($x \notin X$ – x ელემენტი არ ეკუთვნის X სიმრავლეს);

$A \cap B$ – A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა;

$A \cup B$ – A და B სიმრავლეთა გაერთიანება;

$A \setminus B$ – A და B სიმრავლეთა სხვაობა;

$A \subset B$ – A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა;

$F \sim G$ – F და G ფიგურები მსგავსია;

$\Rightarrow$ – გამომდინარეობს;

$\Leftrightarrow$ – ტოლფასია;

P_n – გადანაცვლებათა რაოდენობა;

A_m^n – წყობათა რაოდენობა;

C_m^n – ჯუფთებათა რაოდენობა;

$\overline{A}$ – არა A;

$A+B$ – ორი გამონათქვამის ან/და ორი ხდომილობის ჯამი;

$A \cdot B$ – ორი გამონათქვამის ან/და ორი ხდომილობის ნამრავლი;

$p(A)$ – A ხდომილობის ალბათობა;

$p(A/B)$ – A ხდომილობის ალბათობა B პირობით;

$S_{\Delta ABC}$ – ABC სამკუთხედის ფართობი;

$\varnothing$ – ცარიელი სიმრავლე.

საცნობარო მასალა

ძირითადი ფორმულები

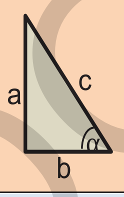
ტრიგონომეტრია		
დაყვანის ფორმულები	ტრიგინომეტრიული იგივეობები	სამკუთხედების ამოხსნა
$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$; $\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$; $\cos(180°\pm\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin(270°\pm\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(270°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$.	πრად $=180°$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$; $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$; $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.

ხარისხი და ლოგარითმი		
$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$; $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}$; $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$; $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$; $a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}$; $a^0=1$;	$\log_a b=c\Leftrightarrow a^c=b$; $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$; $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$; $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$	$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c b}$; $\lg a=\log_{10}a$; $\ln a=\log_e a$.

ვექტორები		
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cos\alpha=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$;	$\vec{a}(x;y;z)$; $a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;	$\cos\alpha=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

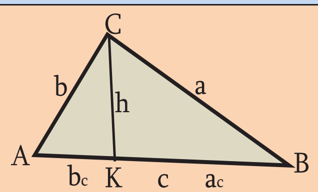
ფართობი		
სამკუთხედის $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$; $S=\frac{ab\sin\alpha}{2}$; ტოლგვერდა სამკუთხედში: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$	სამკუთხედის $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$; $S=\frac{abc}{4R}$; $S=pr$.	წრის $S=\pi r^2$; სექტორის $S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$.

მართკუთხა სამკუთხედი



$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}$.

$R=\frac{c}{2}$; $r=\frac{a+b-c}{2}$



$h^2=a_c\cdot b_c$

$a^2=a_c\cdot c$

$b^2=b_c\cdot c$

$a\cdot b=h\cdot c$

არითმეტიკული პროგრესია	გეომეტრიული პროგრესია
$a_n=a_1+d(n-1)$; $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.	$a_n=a_1q^{n-1}$; $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

ალბათობა

$$p(A)+p(\overline{A})=1;\quad p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B);\ P(A/B)=\frac{p(A\cdot B)}{p(B)}.$$

მათემატიკური ლექსიკონი

ანალოგია – (ბერძნული სიტყვა – **analogia** – „შესატყვისობა“, მსგავსება“.)

აპოთემა – (ბერძნული სიტყვა - **apothema - „**მიდგმული“.)

- წესიერ მრავალკუთხედში არის მისი ცენტრიდან ნებისმიერ გვერდზე დაშვებული მართობული მონაკვეთი.
- წესიერ პირამიდაში არის მისი ნებისმიერი გვერდითი წახნაგის აპოთემა.

არგუმენტი (ფუნქციის) **–** (თავსართი ლათინური სიტყვა - „საგანი“, „ნიშანი“) **-** დამოუკიდებელი ცვლადი სიდიდე, რომლის მნიშვნელობითაც განისაზღვრება ფუნქციის მნიშვნელობა.

აქსიომა – (ბერძნული სიტყვა **–** axiōma) — ამ თუ იმ მეცნიერებაში ამოსავლად მიღებული დებულება, რომელიც თვითონ არ არის დამტკიცებული, მაგრამ აუცილებელია სხვა დებულებათა დასამტკიცებლად. მაგალითად, გეომეტრიული აქსიომა.

გრადუსი – (ლათინური სიტყვა) **–**კუთხის საზომი ერთეული, რომელიც მართი კუთხის $\frac{1}{90}$ ნაწილია.

გრაფიკი – (ბერძნული სიტყვა **– graphikos –** „დახაზული“) ფუნქციის გრაფიკი **–** წირი სიბრტყეზე, რომელიც გამოსახავს ფუნქციის არგუმენტზე დამოკიდებულებას.

დიაგონალი – (ბერძნული სიტყვა **–dia და gonium –**„კუთხეზე“) წრფის მონაკვეთი, რომელიც მრავალკუთხედის ერთ გვერდთან არამდებარე ორ წვეროს აერთებს.

დიამეტრი – (ბერძნული სიტყვა **– diametros –** „განივა“, „გამჭოლი“, „გამზომი“) წრფის მონაკვეთი, რომელიც მრავალკუთხედის ერთ გვერდთან არამდებარე ორ წვეროს აერთებს.

დისტრიბიტულობა – (ლათინური სიტყვა **– distributivus** - „განმანაწილებელი**”) –** კანონი, რომელიც უკავშირდება რიცხვთა შეკრებასა და გამრავლებას.

ვერტიკალური კუთხეები – (ბერძნული სიტყვა **– verticalis** -„წვეროსეული“). საერთო წვეროს მქონე კუთხეთა წყვილი, რომელიც ორი წრფის გადაკვეთით მიიღება ისე, რომ ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების გაგრძელებას წარმოადგენს.

ვექტორი – (ლათინური სიტყვა „გამავრცელებელი“) **–** წრფის მიმართული მონაკვეთი, რომლის ერთ ბოლოს ჰქვია ვექტორის საწყისი, ხოლო მეორეს — ბოლო.

ინდექსი – (ლათინური სიტყვა **- index** „მაჩვენებელი“) **–**რიცხვითი ან ასოითი მაჩვენებელი, რომელიც ერთვის მათემატიკურ გამოსახულებებს, მათი ერთმანეთისაგან განსხვავების მიზნით.

ინტერვალი – (ლათინური სიტყვა **–intervallum** - „შუალედი“, „მანძილი“) **–** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $a < x < b$ უტოლობას.

ირაციონალური რიცხვი – (ბერძნული სიტყვა **- irrationalis –**„ უგუნური“) რიცხვი, რომელიც არაა რაციონალური.

კათეტი – (ლათინური სიტყვა **- katetos** - „შვეული“, „ციცაბო“) **–** მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის ერთერთი გვერდი.

კვინტილიონი –(ლათინური სიტყვა **- quaterni**) **–** რიცხვი, რომელიც ერთიანითა და მომდევნო 18 ნულით ჩაიწერება ერთერთი გვერდი.

კომუტატიურობა – (ლათინური სიტყვა **- commutativus –** „ცვალებადი“) **–** ჯამისა და ნამრავლის თვისება, რომელიც $a+b=b+a$, $ab=ba$ ტოლობით გამოისახება.

კოორდინატები – (ლათინური სიტყვა **–ordinates –** „განსაზღვრული“) გარკვეული წესით აღებული რიცხვები, რომელნიც განსაზღვრავენ წერტილის მდებარეობას წრფეზე, სიბრტყეში, სივრცეში.

კოსინუსი – (ლათინური სიტყვა **– complementi sinus, complementus –**„შევსება“, „დამატება“, **sinus –** ფოსო“, „ღრმული“) ტრიგონომეტრიული ფუნქცია.

ლოგარითმი – (ბერძნული სიტყვა **– logos –** „დამოკიდებულება“ , **arithmos –** „რიცხვი“) ხარისხის მაჩვენებელი m, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a , რომ მივიღოთ N.

მასშტაბი – (გერმანული სიტყვა mas – „ზომა“, stab – „ჯოხი“) ნახაზზე მოცემული მონაკვეთის სიგრძის ფარდობა შესაბამისი მონაკვეთის ნატურალურ სიგრძესთან.

მაქსიმუმი – (ლათინური სიტყვა **– maximum –**„უდიდესი“) ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც განსაზღვრულია მისი განსაზღვრის არის სიმრავლეზე.

მედიანა (სამკუთხედის) **–** (ლათინური სიტყვა - **medianus –**„შუა“, „საშუალო“) მონაკვეთი, რომელიც სამკუთხედის წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილთან აერთებს.

ორდინატა – (ლათინური სიტყვა **– ordinatum** - „რიგის მიხედვით“, „წესრიგის მიხედვით “) წერტილის ერთ ერთი კოორდინატი დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში (როგორ წესი - მეორე), რომელიც y ასოთი აღინიშნება.

პარალელეპიპედი – (ბერძნული სიტყვა - **parallelos –**„პარალელური“ და **epipedos** - „ზედაპირი“) სივრცითი ფიგურა, რომლის ექვსივე წახნაგი პარალელოგრამია.

პარალელოგრამი –(ბერძნული სიტყვა **– parallelos –** „პარალელური“ და „ხაზები“) ოთხკუთხედი, რომლის მოპირაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად პარალელურია.

რადიუსი – (ლათინური სიტყვა **–**radius **–**„ჩხირი ბორბალში“) მონაკვეთი, რომელიც წრეწირის ცენტრს მის რომელიმე წერტილთან აერთებს.

რიცხვი π **–** წრეწირის სიგრძის დიამეტრთან ფარდობა. $\pi \approx 3{,}1415926...$

სტერეომეტრია – (ბერძნული სიტყვა **– stereos–**„მოცულობითი“ და **metreo –**„გაზომვა“) გეომეტრიის ნაწილი, რომელიც სივრცით ფიგურებს შეისწავლის.

ტრიგონომეტრია – (ბერძნული სიტყვა **–** trigonon **–** „სამკუთხედი“ და metreo **–**„გაზომვა“) შეისწავლის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და მათ გამოყენებას გეომეტრიაში.

ფუნქცია – (ლათინური სიტყვა **– functio –**„შესრულება“) მათემატიკის ერთ ერთი ძირითადი ცნება, რომელიც გამოსახავს ერთი ცვლადი სიდიდის დამოკიდებულებას მეორეზე.

ჰიპერბოლა – (ბერძნული სიტყვა **– hyperballo – „**გავდივარ რაღაცის გავლით“) გახსნილი მრუდი ორი უსასრულოდ გაგრძელებული შტოთი.

ჰიპოტენუზა – (ბერძნული სიტყვა **–gyipotenusa** „ მომჭიმავი“) მართკუთხა სამკუთხედის, მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

ჰომოთეტია – (ბერძნული სიტყვა **–** „ ტოლი“, „ერთნაირი“) მსგავსი ფიგურების ისეთი განლაგება, რომლის დროსაც ამ ფიგურების შესაბამისი წერილების შემაერთებელი წრფეები ერთ წერტილში გადაიკვეთება.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი

თავი 1

1.1 1. ა), დ)და ე). (x;y); გ)(-x;-y). 3. ლუკას ვარაუდი. 4. შეასრულა. 5. არ შეასრულა. 6. 13. ბ)დადებითი; გ) უარყოფითი. 7. 3. 8. ა). 9. ა) და დ). 14. არაა ტოლფასი. 15. $A \Rightarrow B$ ჭეშმარიტია, $B \Rightarrow A$ და $A \Leftrightarrow B$ მცდარი. 16. ჭეშმარიტია სამივე გამონათქვამი. 17. ჭეშმარიტია სამივე გამონათქვამი.

1.2 1. გ). 2. დ) $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2};+\infty\right)$. 3. ა)10-ის ჯერადი რიცხვები; დ) კენტი რიცხვები. 4. ნამრავლი – $\varnothing$, ჯამი – $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. 5. ნამრავლი (2;5) წერტილი; ჯამი– ორი წრფის გაერთიანება. 7. ნამრავლი–რგოლი, ჯამი მთელი სიბრტყე. 8. პარალელოგრამების სიმრავლე.

1.3 4. შეიძლება ორივე იყოს ჭეშმარიტი ან ორივე მცდარი 5. ა)1 არც მარტივია და არც შედგენილი; ბ) 25 არ იყოფა 2-ზე და არ იყოფა 3-ზე, მაგრამ იყოფა 5-ზე; გ) $\sqrt{2}$ არაა რაციონალური; დ) არ ჩაიხაზება თუ კვადრატი არაა.

თავი 2

2.1 5. ე. 6. ე) -3,75. 8. ე) 3,(142857). 11. ა) $\frac{7}{9}$; ბ) 1; ი) $1\frac{4182}{99900}$; კ) $9\frac{2}{165}$. 12. $\frac{11}{20}$. 13. $\frac{22}{27}$, $\frac{23}{27}$.

2.2 1. ა) 2,2; ბ)2,6. 4. ა), ე)და ვ). 6. ა) $1\frac{3}{7}$ ბ) 10; გ)11; დ) $\sqrt{2}$. 8. პირველის, 2-ჯერ. 9. 1,414 მ. 10. 50 სმ. 12. $\frac{7931}{9999}$.

2.3 1. 3-ჯერ. 2. 5 დღის. 3. ა) 9; ბ) 9. 4. ა) -3; ბ) -3; გ) -3. 5. 20. 10. 2 . 11. პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი, უმცირესი დადებითი პერიოდი არ აქვს.

შესაძლებელია თუ არა. შეუძლებელია, რადგან არაა 0-ის მიმართ სიმეტრიული.

თავი 3

3.1 3. ა)(x;y); ბ) (x;y); გ)(-x;-y). 6. ა)დადებითი; ბ)უარყოფითი; გ) უარყოფითი; დ)დადებითი. ვ)დადებითი. 7. ა)დადებითი; ბ)დადებითი; გ) უარყოფითი; დ)დადებითი. 9. ა)უარყოფითი; ბ)დადებითი; გ) უარყოფითი. 13. ვ) $\operatorname{tg}10^\circ$. 15. გ)-c. 16. 60° და 120° 17. 45° და 225°. 18. 90° და 270°. 20. ა) -1; დ)0. 21. ა) $2a-5a^2$; დ)15. 22. ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) π; გ) $\frac{\pi}{12}$. 23. გ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}$. 24. ა) 160°; ბ) 200°. 25. ა) 160°; ბ) 340°.
26. ა) $180^\circ \cdot k,\ k \in Z$; ბ) $90^\circ + 180^\circ \cdot k,\ k \in Z$. 30. გ) $\sqrt{0,91}$.

3.2 6. უარყ., დადებ., დადებ. 8. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$. 9. $12^\circ, 36^\circ, 132^\circ$. 12. ა) 0; დ)-2. 13. ა) $2a-a^2$; დ) $\frac{a+b}{a-b}$. 15. ა) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$; ბ) $2\pi k, k \in Z$; გ) $\pi k, k \in Z$. 16. ანიმ. 17. ა) $\sin 0,5 < 0,5$; ბ) $\cos 0,5 > 0,5$; გ) $\operatorname{tg}1 > 1$. 18. 12სმ^2. 24. ლუწია: ბ) და გ); კენტია: ა) და ვ).

3.3 2. ლუწია ბ), კენტი ა) და გ). 4. ა) $\frac{2\pi}{5}$; ვ) 2π. 9. $-\frac{\sqrt{21}}{5}$. 10. $\frac{\sqrt{15}}{16}$. 11. ა) $[-3;1]$; ბ) $[-1;0]$; გ) $[-1;2]$; დ) $[0;+\infty)$. 13. ა) 2π; ბ) π; გ) π; დ) π; ე) 2π; ვ) 12π ზ) π; თ) 12π.
14. $\left[\frac{3}{4};3\right]$; 15. ა) 0,5.

შესაძლებელია თუ არა. შეუძლებელია. აბა, სცადე! $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

3.4 8. ა) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; ბ) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; გ) π. 9. ა) $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; ბ) $0,\ \pi$; გ) $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 10. ა) $\cos\alpha$; ბ) $-\frac{1}{\cos\alpha}$; თ) $\sin^2\alpha$. 11. დ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. ა)-6; ე) $-\frac{6+\sqrt{6}}{6}$. 13. ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ)1; გ) 0. 14. ა)-1; ბ) $\frac{\sin 50^\circ}{2}$. 17. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{4}$; გ) $\frac{1}{3}$. 18. ა) $\frac{3}{4}$; ბ) $\frac{1}{4}$. 20. ა) -a; დ) -a.
21. cos10 =-cos(10-3π); sin11=-cos(11-3,5π). 24. ა) 0; ბ) 2; გ)1.

3.5 13. ა) 3 და 1; დ) 1 და 0,5. 14. 45. 15. ა) 5, -4; ბ) $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$. 17. $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. 19. a. 20. ა) a; ბ) -a; g) a; დ) -a; ე) $\sqrt{1-a^2}$.

3.6 9. $\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{2}, \cos\frac{4\pi}{3}$. 11. $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. 12. ა) 3 და -1; დ) 1 და 0,5. 13. $\pm\frac{5\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6}$. 14. ა)5 და -2; ბ) $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$. 15. $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$. 16. 30.
17. ა)5; დ) 0,2. 18. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

3.7 3. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$. 4. $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$.4,8 მ³. 5. $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.
7. $\pi k,\ k\in Z$. 9. ა) 1; ბ) 1; გ) $\mathrm{tg}^{-1}\alpha$. 11. ა) $\sin\alpha=\pm0{,}6,\ \cos\alpha=\pm0{,}8$.

3.8 1. ა) $\frac{\pi}{4}$; გ) $-\frac{\pi}{4}$; ე) $\frac{\pi}{2}$; ზ) 0. 2. ა) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{3\pi}{4}$; ე) 0; ზ) $\frac{\pi}{2}$. 3. ა) $\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{6}$; ზ) 0. 4. დ). 5. ა) 1სმ; ბ) 0,13; გ) 7; დ) 0,5. 6. ა) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; გ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ზ) $\pi k,\ k\in Z$. 7. ა) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; გ) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; ე) $2\pi k,\ k\in Z$; ზ) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. 8. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; ზ) $\pi k,\ k\in Z$. 9. ა) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$.
10. $\frac{7\pi}{6}$ და $\frac{11\pi}{6}$. 11. $\frac{7\pi}{4}$. 12. $-\frac{2\pi}{3}$. 13. ა) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; დ) $\pi k,\ k\in Z$. 14. $\pi k,\ k\in Z$. 15. ბ) $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt5-1}{2}+\pi k, k\in Z$.
16. ა) 0; ბ) $2\pi-4$; გ) $\frac{\sqrt2}{2}$; დ) $\frac{2}{\sqrt5}$; ე) $\frac{2\sqrt2}{3}$. 17. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; გ) $\pi k,\ k\in Z$; დ) $\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$. 18. ა) a; ე) $\sqrt{1-a^2}$; 19. $AB=\frac{a\sqrt6}{2}$; $AC=\frac{a\left(\sqrt3+1\right)}{2}$.
20. ა) $\frac{\alpha}{2}$; ბ) $180°-\frac{\alpha}{2}$.

3.9 1. ა) 5სმ; ბ) $\sqrt{37}$ სმ; გ) $\sqrt{13}$ სმ. 2. ა) $\sqrt{169-60\sqrt3}$ სმ; ბ) 13სმ; გ) $\sqrt{169+60\sqrt3}$ სმ. 4. $6\sqrt{2-\sqrt3}$ სმ. 5. $5\sqrt{10}$ სმ. 6. ა) $4\sqrt5$ სმ; ბ) $4\sqrt5$ სმ ან $8\sqrt5$ სმ. 7. ა) 45°, 45°, 90°; ბ) 30°, 30°, 120°. 8. ა) 90°; ბ) 150°. 9. ა) ბლაგვკუთხა; ბ) მართკუთხა; გ) მახვილკუთხა.
10. 8სმ. 11. $2\sqrt{13}$ სმ. 12. $2\sqrt7$ სმ და $2\sqrt{19}$ სმ. 13. 3სმ და $\sqrt{17}$ სმ. 14. $\frac{\sqrt{241}}{2}$ სმ, 7სმ, $\frac{\sqrt{145}}{2}$ სმ. 15. $3\sqrt2$ სმ. 16. $\frac{\sqrt{190}}{2}$. 17. $4\sqrt7$ სმ, $2\sqrt{37}$ სმ, 14სმ; ან $2\sqrt{97}$, $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{19}$.
19. $\frac{2\sqrt{31}}{\sqrt7}$. 20. $\frac{5\sqrt7}{3}$ მ. 21. $2\sqrt3$ სმ. 22. $\arccos\frac{16}{65}$ ან $\arccos\frac{56}{65}$. 23. 4სმ. 24. 1<x<3.
25. $\frac{a}{\sin\alpha}$. **აბა, სცადე!** გამომდინარეობს კოსინუსების თეორემიდან.

3.10 1. ა) 10სმ; ბ) $8\sqrt{2}$ სმ; გ) $4\sqrt{3}$ სმ. 2. ა)6სმ; ბ)$6\sqrt{2}$ სმ; გ)$6\sqrt{3}$ სმ; დ)12სმ; ე)$6\sqrt{3}$ სმ. 3. ა) 1; ბ) 0,5; გ) $\frac{5}{12}$. 5. 60° ან 120°. 6. 10სმ. 7. ა) 9; ბ) 3; გ) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. 8. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ სმ. 9. $\frac{16\sqrt{3}\sin 40^\circ}{3}$ სმ, $\frac{16\sqrt{3}\sin 80^\circ}{3}$ სმ. 10. $\arccos 0{,}2$; $\arccos\frac{19}{35}$; $\arccos\frac{5}{7}$. 11. 4, 90°, 30°. 12. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$. 14. $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 15. $8\frac{1}{8}$ სმ. 16. $\frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ მ. 17. $4R\sin\alpha+\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 20. 136სმ². 21. 27. 22. 24სმ². 23. 52სმ². 24. 8სმ².

3.11 3. ა)6სმ²; ბ)$4\sqrt{6}$ სმ²; გ)336სმ²; დ)$\sqrt{10}$ სმ². 4. ა)R= 8,5სმ; r=3სმ; h=$\frac{120}{17}$; ბ) R=$3\frac{1}{8}$ სმ; r=1,5სმ; h=4 სმ; გ)R=$\frac{77}{4\sqrt{10}}$ სმ; r=$\frac{4\sqrt{10}}{5}$ სმ; h=$2\sqrt{10}$ სმ. 6. ა) 50 სმ²; დ)$100\sin 40^\circ$ სმ². 8. ა)$\sqrt{17}$ სმ; ბ)$\sqrt{65}$ სმ. 9. 6სმ². 10. 15 სმ². 11. $25(3-\sqrt{3})$ სმ². 13. $0{,}25\sqrt{(a+b+2m)(a+2m-b)(b+2m-a)(a+b-2m)}$. 14. 36სმ². 18. ა)2a; ბ)$a\sqrt{3}$; გ) a; დ) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; ე) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. 19. 36.

თავი 4

4.1 1. ეკუთნის. 2. არა. 3. ა) N; ბ) Q; გ) P, Q. 4. მცდარია: ვ) და თ), დანარჩენი ჭეშმარიტია. 5. ე) არა, დანარჩენი კი. 6. $a\sqrt{5}$ სმ; 7. $\frac{a\sqrt{29}}{2}$ სმ.

4.2 1. ბ). 2. გ). 3. დ). 4. ბ). 6. მართებულია მხოლოდ ა). 7. ერთი ან არცერთი. 8. მცდარია ა), ჭეშმარიტია ბ). 9. ა)90°; ბ)0°; გ)0°; დ)90°; ე) 45°. 10. ა)45°; ბ) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ.

11. ა) DC_1; ბ) A_1C_1; გ) A_1D; დ) A_1C_1D; $P=3\sqrt{2}a$ სმ, $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ სმ². 12. ა)1; ბ)0.

შესაძლებელია თუ არა? შეუძლებელია. **აბა, სცადე!** 10.

4.3 3. არ შეიძლება. 4. ბ) 8სმ. 5. ა), ბ) დ), ე). 6. ბ) 5სმ. 8. გ) 20სმ. 9. გ)1,5aსმ; დ)$\frac{a\sqrt{7}}{2}$ სმ.

4.4 1. დ). 2. ა). 3. გ). 4. ჭეშმარიტია. 5. გ). 8. $18\sqrt{3}$ სმ², $18\sqrt{3}$ სმ². 10. ა)19,2სმ; ბ)15,36სმ². 11. 22 სმ. 12. ა)$3\frac{1}{3}$ სმ; ბ)10სმ; გ)1:9.

აბა, სცადე! მიიღება ტეტრაედრის (სამკუთხა პირამიდის) კარკასი.

4.5 1. გ). 2. დ). 3. დ). 4. ა).

4.6 2. 4. 3. ბ). 4. ტოლია. 5. შეიძლება იყოს ტოლი. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. 6 სმ. 8. $4\sqrt{5}$ სმ, 6სმ.
9. 12სმ. 10. $\frac{5}{13}$. 11. 7სმ, 1სმ. 12. არ შეიძლება. 13. ორივე. 14. ა)მართკუთხედი, $a^2\sqrt{2}$; ბ) $a\sqrt{3}$; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 16. 8სმ, 10სმ, 10სმ, $2\sqrt{34}$ სმ. 17. ა) $4\sqrt{11}$სმ; ბ) $4\sqrt{10}$ სმ.
20. $20\sin\frac{\alpha}{2}$ სმ, $10\cos\frac{\alpha}{2}$ სმ. 21. $\frac{3\sqrt{399}}{8}$ სმ. **აბა, სცადე!** 180°.

4.7 1. 45°. 2. 130°. 3. 10სმ. 4. 45°. 5. 8 სმ. 6. $2\sqrt{21}$ სმ. 7. 60°. 9. ბ) 3. 10. 45°. 11. 70°.
12. $16\sqrt{2}$სმ². 13. 12სმ². 14. $6\sqrt{2}$ სმ. 15. $\sqrt{2}$-ჯერ. 16. ა) $2\sqrt{3}$ სმ; ბ) $2\sqrt{39}$სმ²; გ) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

4.8 1. 4. 2. 1. 3. მართი. 4. ბ). 5. მართებულია: ა), გ), ზ), თ), ი), კ), დანარჩენი არა.
7. ა) პერიმეტრი $(2a+2\sqrt{2}a)$, ფართობი $\sqrt{2}\,a^2$; ბ) პერიმეტრი $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})a$, ფართობი $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. 8. ა) 90°; ბ) 60°. 9. ა) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ; ბ) 30°. 10. ბ)$5\sqrt{5}$სმ. 11. 3) 13 სმ. 12. 60°.
აბა, სცადე! ა) 1; ბ) 2.

4.9 1. 15სმ, 25სმ. 2. 2,4სმ. 3. 10სმ. 4. 5სმ, 5სმ. 5. გ). 6. ა) 8სმ; ბ) $8\sqrt{2}$სმ; გ) $8\sqrt{3}$სმ; დ) $8\sqrt{2}$სმ; ე) $8\sqrt{2}$ სმ; ვ) 8სმ; ზ) 8სმ; თ) $4\sqrt{2}$სმ. 7. ა) aსმ; ბ) aსმ; გ) aსმ; დ) aსმ.
8. ა) $\sqrt{82}$სმ; ბ) $\sqrt{73}$სმ. 9. ა)$2\sqrt{34}$სმ; ბ)$2\sqrt{41}$სმ; გ)$10\sqrt{2}$სმ; დ)10სმ; ე)10სმ; ვ)$2\sqrt{34}$სმ; ზ) $2\sqrt{41}$სმ. 10. ა)1; ბ) 8სმ; გ) 8სმ. 11. ა) 6სმ; 9სმ; 7სმ; ბ) $7\frac{1}{3}$სმ. 12. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ სმ.
13. $0{,}4\sqrt{769}$სმ. 14. 48სმ; 15. $\sqrt{39}$ სმ; 16. ა) $\sqrt{29}$სმ, ბ) $\sqrt{33}$სმ, $3\sqrt{5}$სმ, $\sqrt{65}$სმ;
17. ბ)$\frac{\sqrt{6}}{9}a$ სმ; **აბა, სცადე!** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

თავი 5

5.1 5. ა) $\sqrt[60]{a^{47}}$; ვ) $\sqrt[24]{x^{65}}$. 7. ა)2; ო)225. 8. ა)0,2; დ)2. 9. ა)$3\frac{1}{3}$; ბ) 26; გ) 2; დ)6. 11. ა)0,5; ბ)$-\frac{16}{45}$.
12. ა) x+1; ბ)$-\sqrt{x}$. 13. ა)8; ბ) -2x; გ) 2x; დ)2x. 14. ა) $x=\frac{2}{7}$, $y=\frac{1}{14}$; ბ) $x=\frac{7}{9}$, $y=-\frac{2}{3}$. 15. ა)0,25; ბ)$\frac{1}{3}$; გ) $\frac{1}{3}$. 16. ა)9; ბ)$\frac{10}{3}$. 18. ა), დ) და ვ). 19. ა) 1210 ლარი; ბ)1153,7 ლარი; გ)1356,6ლარი.

5.2 3. ა) 1; ბ) 9; გ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; დ) $\sqrt[4]{3}$. 4. ა) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2} > 7^{-2,1}$; ბ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5} < 1$; გ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,2} > 1$;

ე) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}} < 9^{1,7}$; ვ) $2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1,7}$; ზ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$; თ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{12}} = 9^{\sqrt{3}}$.

5. ა) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2\sqrt{2}}$; ბ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{11}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{0,01}, 1.$

6. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-2\sqrt{3}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{11}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$. 7. ზრდადი ფუნქციაა.

10. ა) 64; ბ) 8; გ) 4; დ) 2; ე) 4. 11. ვ) $(1;0)$; $\left(0;5\sqrt{5}-25\right)$. 12. ვ) ± 1. 13. ა) კლებადი; დ) ზრდადი; ვ) კლებადი. 14. ა) $a<b$; ბ) $a<b$; გ) $a>b$. 16. ა) 9; ბ) 1; გ) 25; დ) 1.

18. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{44}}, \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\sqrt{7}}, 1, \left(5+\sqrt{24}\right)^{\sqrt{5}}, \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-4\sqrt{3}}$. 19. ა) $f(3) > h(2)$; ბ) $f(-3) < h(-2)$; გ) $f(4) = h(2)$; დ) $f(3) < 1$; ე) $h(-3) > 1$. 20. ა) $a \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$; ბ) $a \in \left(-2;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};2\right)$. 21. 2. შესაძლებელია თუ არა. ა) არა; ბ) კი.

5.3 2. ა) 2T; ბ) $T\log_2 5$. 4. ა) -3; ბ) 1,5; გ) 0; -3; 3; დ) 2,8; ე) -2; ვ) $\frac{3}{4}$; ზ) $\frac{-2}{3}$; თ) $-\frac{1}{6}$. 8. ა) -1; ბ) 1; გ) 0; დ) 3; ე) 2; ვ) 3; ზ) 2,5; 9. ა) 0; ბ) 3; გ) 4, -2; დ) -1. 10. ა) $\frac{3}{2}$; ბ) $\frac{3}{2}$; გ) -2; დ) 3; ე) 4; ვ) 0,008.

11. ა) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ბ) -2; გ) 4; დ) 1,5; ე) 0; 0,5; ვ) 0,6. 12. ა) 10; ბ) $\log_{1,1} 2$.

5.4 4. ა) 17; ბ) 24; გ) 1; დ) -3; ე) 2. 5. ა) 4; ბ) 49; გ) $\frac{4}{15}$; დ) $\frac{5}{9}$; ე) -1; ვ) $-\frac{2}{3}$. 6. ა) 2; ბ) 4; გ) -3; დ) 25; ე) 4; ვ) 4. 7. ა) 2; ბ) 1; გ) 1; დ) -2. 8. ა) 5; ბ) 1,5; გ) 2; დ) 2; ე) 1. 9. ა) 0,32; ბ) 14; გ) 6; დ) 81. 10. ა) -2; ბ) 2; გ) 1; დ) $-\frac{2}{3}$. 12. ა) -0,5; ბ) -1; გ) 0. 13. ა) 0; ბ) -1; გ) -1. 14. ა) 190; ბ) 52.

15. 1+a. 16. 2a+b. 17. $\frac{6}{a}$. 18. $\frac{a-2}{9}$. 19. ა) 4; ბ) 65; გ) 15; დ) 2. 20. 3a+ab. 21. 7.

5.5 4. პირველი წევრია 1, სხვაობა – -1. 5. 55. 6. -65. 7. ა) $x=6a^3$; ბ) $x=\frac{a^2k^4}{c^3}$; გ) $x=a^4b^5$; დ) $x=\frac{a}{c^4}$; ე) $x=\frac{a^3}{b^4}$; ვ) $x=\frac{(a+c)^3}{\sqrt{a-c}}$. 8. ა) $x=c\sqrt{c}\sqrt[3]{a^2}$; ბ) $x=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{(a-c)\sqrt[3]{c^2}}$;

გ) $x=\sqrt[3]{a^2c^2}$; დ) $x=\frac{a^3b^4}{c^5}$. 9. ა) $x=\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[5]{n^3}}$; ბ) $x=\frac{(m+n)^2}{(m-n)^3}$; გ) $x=m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{3}{5}}$; დ) $x=\frac{\sqrt[3]{(m-n)^2}}{\sqrt{m+n}}$.

10. ა) $x=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{(a-b)^2}}$; ბ) $x=\frac{\sqrt[3]{(a-b)^2}}{a^3\sqrt[4]{a^3}}$. 12. ა) 10, 0,1; ბ) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$; გ) 81. აბა, სცადე! 3.

5.6 3. ა) $[0;+\infty)$; ბ) $(-\infty;+\infty)$; გ) $[-2;+\infty)$. 5. ა) $\log_3 12 < \log_3 15$; ბ) $\log_{\frac{1}{3}} 12 > \log_{\frac{1}{3}} 15$;
გ) $\lg 2 < \lg 3$; დ) $\lg_{0,1} 5 > \lg_{0,1} 6$. 6. ა) $\log_2 1,2 > 0$; ბ) $\log_3 0,5 < 0$; გ) $\log_{\frac{1}{3}} 0,3 > 0$; დ) $\log_{\frac{1}{3}} 5 < 0$;
ე) $\lg 2 > 0$; ვ) $\lg 3 > 0$; ზ) $\lg_{0,1} 1 < 0$; თ) $\lg_{0,1} 2 < 0$. 7. ა) $a > b$; ბ) $a > b$; გ) $a < b$; დ) $a < b$.

8. ა) $x \in (-2;+\infty)$; ბ) $x \neq 0$; გ) $x > 0$; დ) $x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$; ე) $x \in (0;+\infty)$.

9. $\lg 0,01$, $\log_{0,2} 5$, $\log_3 1$, $\lg 3$, $\lg 7$. 10. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{7}$, $\log_2 5$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$, $\log_2 3$, $\log_4 8$.

11. ა) $\log_7 6 < \log_6 7$; ბ) $\log_{0,4} 0,5 > \lg\sin\frac{\pi}{7}$; გ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(\sqrt{3}-1)} > 1$; ბ) $3^{\lg(\sin^4 x+\cos^4 x)} \leq 1$.

12. ა) $(-2;-1) \cup (1;2)$; ბ) $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right) \cup \left(2;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;
გ) $(-\infty;2) \cup (4;5)$. 13. ა) $3\sqrt{3}$; ბ) $\frac{343}{13\sqrt{13}}$; გ) 2; დ) -1.

5.7 1. თ) ± 9. 2. ტოლფასია მხოლოდ გ). 3. ა) 0,5; ბ) 1; გ) 2 და 3; დ) 1 და 7; ე) 36; ვ) 3; ზ) 32.
4. ა) 2; ბ $\varnothing$; გ) 1,25; დ) 4. 5. ა) -5 და 1; ბ) 3; გ) 5; დ) 2. 6. ა) 1; ბ) -3; გ) 18 და 12; დ) -5.
7. ა) 4 და 0,5; ბ) 0,001 და 0,0001; გ) 1 და 125. 8. ა) 2 და 1; ბ) $\frac{-5+\sqrt{41}}{4}$; გ) 5 და 15; დ) $3+3\sqrt{2}$
. 9. ა) 10 და 100; ბ) 10 და 1; გ) 10; დ) $\varnothing$. 10. ა) 0,01 და 100; ბ) 1; გ) 10; დ) 10; ე) 10.
11. ა) 9 და $\frac{1}{3}$; ბ) ± 6; გ) 2 და $\frac{1}{16}$; დ) 10; ე) 2; ვ) 9 და $\frac{1}{9}$. 12. ვ) $(-\infty;-7] \cup [-0,5;3]$;
ზ) $(-\infty;2] \cup [2,5;+\infty)$; ნ) $(-\infty;-2) \cup (-1;7)$. **აბა, სცადე!** (0; 0,25).

5.8 3. ა) არა; ბ) კი; გ) კი. 5. ა) $x \in R$; ბ) $\varnothing$; გ) $x > -1+\lg_3 2$; დ) $x > \lg_{0,2} 3$; ე) $x > \frac{1}{2}\lg_5 11$.
6. ა) $x > -\frac{1}{2}$; ბ) $x \leq \frac{4}{5}$; გ) $x > \frac{7}{2}$; დ) $x > 1$. 7. ა) $x < 3$; ბ) $x \in R$; გ) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$;
დ) $[0,1;+\infty)$. 8. ა) $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right)$; ბ) $(-\infty;-8) \cup (4;+\infty)$; გ) $(-\infty;3)$; დ) $(0;+\infty)$. 9. ა) $1 < x < 6$;
ბ) $3 < x < 7$; გ) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$; დ) $(-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$.
12. ა) $[0;2]$; ბ) $(\lg_3 2;1)$; გ) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$; დ) $(-\infty;\log_2 3)$. 13. ა) 0, 1, 2; ბ) 0, 1, 2, ...
14. ა) $(-\infty;-8] \cup [-5;+\infty)$; ბ) $(0;+\infty)$. 16. ა) $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$; ბ) $(1;2)$; გ) $\varnothing$; დ)
$(-3;-2) \cup (2;+\infty)$ 17. ა) $(-1;3,5)$; ბ) $\varnothing$; გ) $\varnothing$; დ) $[-1;2)$; ე) (3,6;5); ვ) $(3;+\infty)$ ზ) $(-1-\sqrt{11};-3)$;
თ) $(-2;-1] \cup [1;2)$. **აბა, სცადე!** -3.

5.9 1. ა)(0;9); ბ)$(27;+\infty)$; გ) $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$; დ) $\left(0;\frac{1}{25}\right]$; ე) $\left(0;\frac{1}{4}\right]$; ი)$[9;+\infty)$; კ)$(27;+\infty)$; ლ) (3,5;5); მ)(0;1,25). 2. ა)$(2;+\infty)$; ვ) (-10;2,5); ზ)$(-5;-4,95]$. 3. ა)(1,5;2); ბ)$(2;+\infty)$; გ) $\left(\frac{1}{3};1\right)$; დ)(1;3). 6. ა)$(8;+\infty)$; ბ)(2;6,5); გ)$(-\infty;-37)$; დ)(0;2). 7. ა)$[10;+\infty)$; ბ)$\left[0,5;\frac{4}{7}\right)$; გ)$(4;+\infty)$; ე) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. 8. ა)(-3;1); ბ) $\left(-1-\sqrt{13};-3\right)\cup\left(1;-1+\sqrt{13}\right)$; გ)$(-0,5;-0,25)\cup(0,75;1)$.

9. ა)$\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{26}}{3}\right]$; ვ)$(0;3]$. 10. ა)$\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$; ბ)$\left(\frac{1}{9};9\right)$; გ)$(0;0,001)\cup(10;+\infty)$; დ)$[2;16]$.

11. ა)$(-2;+\infty)$; ბ)$(-\infty;-4)$; გ) $(-\infty;-2)$; დ) (-6,5;-4). 12. ა)$(-\infty;-11)$; ბ)$(0;3)\cup(7;+\infty)$; გ)$\left(2^{-\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right)$; დ)$\left(-2;\frac{-31}{16}\right)$; ე)$\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; ვ) (0,5;4).

თავი 6

6.1 1. $\overrightarrow{BA}$. 2. ა) 4; ბ) 8. 3. ბ). 4. გ). 5. ა)$\overrightarrow{DC}$; დ) $\overrightarrow{DB}$. 6. ბ) და ე). 7. გ). 8. პარალელოგრამი.
9. ტრაპეცია. 10. დ). 11. $4\vec{a}$. 12. $7\vec{a}+16\vec{b}$. 14. ა) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 15. ა) $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
16. $\sqrt{336}$ ნ. 17. 90°. 18. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 22. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 23. $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{13}\overrightarrow{AC}+\frac{8}{13}\overrightarrow{AB}$.
24. $\overrightarrow{CK}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$. 27. $2\sqrt{13}$. 28. (-3;-4). 29. 13. 30. ა) 5; ბ)(-2;-5), (-3;-4). 31. (a+c;b+d).

6.2 2. ა) (7;3); დ) $\left(-\sqrt{2};-2\right)$. 3. ა)5; ბ)13; გ) $\sqrt{10}$; დ)2. 4. ა)5; ბ)5; გ) $3\sqrt{2}$; დ)17; ე) 17; ვ) 1; ზ)2.
7. ა)5; ბ)13; გ)5; დ)7; ე) 5; ვ) $\sqrt{2}$; ზ) $\sqrt{2}$. 9. ა)(0;0); ბ)(-4;3,5) გ)(6;-15); დ)(16;9). 11. ა)5; ბ)13; გ)2; დ) $\sqrt{113}$. 12. $\sqrt{313}$. 13. ±6. 14. ±8. 15. (0;-2). 16. 45°. 17. ა)135°; ბ)135°; გ)15°. 18. ა)45°; ვ)30°. 19. ა) საწინააღმდეგოდ მიმართული; გ) თანამიმართული.
20. ა) 4; ბ) -4. 21. 3. 22. ა) (12;16); ბ) (-12;16). 23. $(3;-5\frac{1}{3})$. 24. (0;-1). 25. $\vec{a}=-3\vec{b}+2\vec{c}$.
27. ა)$\frac{1}{9}$; ბ)0; გ)-0,2. 28. ა)ბლაგვკუთხა; ბ)მართკუთხა; გ)მახვილკუთხა.

6.3 1. 12. 2. -10. 3. ა)21; ბ)$14\sqrt{2}$; გ)-66; დ) 0. 4. ა)-3; დ) 0. 5. ა) $\frac{7}{25}$; ბ) 0; გ) 0; დ) $\frac{240}{289}$.
6. ა)180°; ბ)90°; გ)0°; დ)30°. 7. ა)60°; ა)45°; გ)150°. 8. ა)მახვილი; ბ) ბლაგვი; გ)მართი; დ)ბლაგვი. 9. 0 ან -1,5. 10. 2. 11. -59. 12. $3\sqrt{29+10\sqrt{3}}$. 13. 1,5. 14. ა) -20; ბ) -22,5; გ)$-\frac{300}{13}$.
15. 7. 16. 10. 17. (-1,5;7). 18. 5. 19. (-2;1). 20. $4\sqrt{3}$. 21. 13სმ.

6.4 1. ა)OX; დ)არცერთს. 2. ა)OXZ; ვ)არცერთს. 3. ა)13; დ)$\sqrt{111}$. 4. $\pm\sqrt{21}$. 5. $2\sqrt{2}$. 6. 5.
7. 13. 8. ($\pm1,1$; 0;0). 9. (0;±9;0). 10. (0;0; ±7). 11. ა)3; ბ)2; გ) 1. 12. ა)(2;0;-1). 13. ა) 5.

14. C(1;1;0), C_1(1;1;1), B_1(1;0;1), D_1(0;1;1). 15. ა) $\frac{\sqrt{61}}{3}$; ბ) $\frac{\sqrt{14}}{3}$; გ) $\frac{\sqrt{13}}{3}$. 16. C(3;4;0), C_1(3;4;5), B_1(3;0;5), D_1(0;4;5). 17. (-3;3) და (3;-3). 18. ა) (-9;-26); ბ) $11\sqrt{2}$; გ) $-\frac{7}{\sqrt{170}}$.

შესაძლებელია თუ არა. 3 წერტილის შემთხვევაში შეუძლებელია, 4-ის შემთხვევაში – შესაძლებელი.

6.5 1. ა)(-2;-1;-6); დ) $\left(-\sqrt{3};-2\right)$. 2. ა)13; დ) $\sqrt{2}$. 3. ა)5; ვ)2. 9. (-10;-8;11). 10. ა) $\sqrt{249}$; დ) $\sqrt{65}$.

11. $\sqrt{414}$. 12. ა)10,5; დ)0. 13. ა)1; დ)3. 14. ა) $-\frac{137}{169}$; დ) $\frac{64}{289}$. 15. ა) $180°$; დ) $30°$. 16. ა) $60°$; გ) $150°$. 17. ა)ბლაგვი; ბ) მახვილი; გ)მახვილი; დ)ბლაგვი. 18. 2. 19. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 20. -68. 21. 7.

22. ა)(48;-12;16); ბ)(12;-16;-48). 23. $\frac{\sqrt{46}}{2}$. 24. -70. 25. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

შესაძლებელია თუ არა. შეუძლებელია.

თავი 7

7.1 1. ა)-17; ბ)2მმ და 2მ; გ)2კგ; დ)0,1ჰა. 2. ა) საშუალო, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის -2, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის $\frac{1}{9}$; მედიანა, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 0, ექსრემალური მონაცემის გერეშე არის 1; ბ) საშუალო, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 11,8, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის $5\frac{1}{3}$; მედიანა, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 6, ექსტრემალური მონაცემის გერეშე არის 5. 3. ექსტრემალური მონაცემებია: 11000 და 600; საშუალო, ექსტრემალური მონაცემების ჩათვლით არის 3500, ექსტრემალური მონაცემის გარეშე არის 2925; მედიანა, ექსტრემალური მონაცემის ჩათვლით არის 2900, ექსრემალური მონაცემის გერეშეც არის 2900; ტიპურ მაჩვენებლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ 2900. 4. ბათუმში: გაბნევის დიაპაზონი 4°, სტანდარტული გადახრა $\sqrt{2}°$; თელავში: გაბნევის დიაპაზონი 6°, სტანდარტული გადახრა 2° ; ბათუმში ამინდი უფრო სტაბილურია, ვიდრე თელავში. 6. მათემატიკა: საშუალო 7,4, მედიანა 8, დიაპაზონი 7, სტანდარტული გადახრა $\sqrt{6} \approx 2,45$; ბიოლოგია: საშუალო 7,4, მედიანა 7, დიაპაზონი1, სტანდარტული გადახრა 0,5; ისტორია: საშუალო 8,8, მედიანა 9, დიაპაზონი 2, სტანდარტული გადახრა 0,75; უკეთესად სწავლობს ისტორიას, სტაბილური შეფასებები აქვს ბიოლოგიაში .

7.2 2. ა)

ასაკი	დაგროვილი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
9	2	10%
10	2	10%
11	3	15%
12	3	15%
13	7	35%
14	8	40%
15	10	50%
16	14	70%
17	20	100%

5.

მონაცემები	3	4	4	5	5
რანგი	1	2,5	2,5	4,5	4,5

7.

ქულა	3	5	6	7	8	9
სიხშირე	1	1	2	3	2	1

9. ა)3!; ბ) 3^3. 10. ა)$5\cdot4\cdot3$; ბ) 5^3. 11. ა) C_5^2; ბ) C_5^3; გ) 5. 12. $12\cdot13$, $C_{12}^2\cdot C_{13}^2$.

7.3 1. ა)2; ბ)8; გ)6; დ)36; ე) 2^n; ვ) 6^n. 2. ა) 36; ბ) C_{36}^2; გ)27; დ)16. 3. ა) შეუძლებელი; ბ) შემთხვევითი; გ) აუცილებელი. 4. ა) შემთხვევითი; ბ) შეუძლებელი; გ) აუცილებელი. 5. ა)და ბ). 6. ა)და ბ). 7. A და C. 8. ბ). 12. $\frac{1}{4}$. 13. ა) $\frac{1}{36}$; ბ) $\frac{5}{36}$; გ) $\frac{1}{6}$; დ)0. 14. ა) $\frac{3}{5}$; ბ) $\frac{2}{5}$.

15. ა) $\frac{3}{10}$; ბ) $\frac{1}{10}$. 16. ა)0; ბ) $\frac{1}{C_{15}^5}$; გ) $\frac{6}{C_{15}^5}$. 17. ა) $\frac{C_4^2}{C_{15}^2}$; ბ) $\frac{C_5^2}{C_{15}^2}$; გ) $\frac{C_6^2}{C_{15}^2}$. 20. ა)0,28; ბ)0,82.

21. ა)0,21; ბ)0,29; გ)0,44; დ) 0,94. 22. ა)$(0,9)^{12}$; ბ) $(0,9)^{12}+(0,9)^{12}-(0,9)^{12}\cdot(0,9)^{12}$. 23. ა) $\frac{C_3^3C_{17}^7}{C_{20}^{10}}$;

ბ) $\frac{C_3^1C_{17}^9}{C_{20}^{10}}$; გ) $1-\frac{C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}}$. 24. 0,17.

7.4 1. $\frac{3}{4}$. 2. 0,4. 3. 0. 4. 0,7. 5. ა)0,5; ბ)0,5; გ)0; დ) $\frac{1}{3}$; ე) $\frac{2}{3}$. 6. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{3}$. 7. ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{1}{3}$. 8. ა) $\frac{1}{6}$; ბ) $\frac{1}{6}$. 9. ა) $\frac{1}{6}$; ბ) $\frac{1}{6}$. 10. 0,3, 0,7. 11. 0,5. 12. 0,75. 13. 0,6, 0,6. 14. ა)0,4; ბ)0,6; გ)0,6. 16. ა) $\frac{4}{7}$; ბ)1. 17. $\frac{1}{6}$; 18. $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$.

მთელი კურსის გასამეორებელი დავალებები

15. 30°. 17. ა) $\sqrt{592}$ სმ; ბ)84 სმ². 20. დ). 21. შესაძლებელია. 22. 8სმ. 25. 3 სმ. 26. 60°.

27. 54 სმ. 36. ა) $\overrightarrow{AD_1}$; ბ) $\overrightarrow{A_1B}$. 37. $-\frac{\overrightarrow{DA}}{2}-\frac{\overrightarrow{DB}}{2}+\frac{\overrightarrow{DC}}{2}$. 38. 90°, 90°, 180°. 39. 60°. 40. 0,16.

41. $\frac{C_{997}^2}{C_{1000}^2}$. 42. $\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}$. 43. ა) $\frac{1}{11}$; ბ) $\frac{2}{11}$.